

# **Symmetriereduktionen und explizite Lösungen für ein nichtlineares Modell eines Preisbildungsprozesses in illiquiden Märkten**

Von der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik  
der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Math. Alina Y. Chmakova

geboren am 25.01.1977 in Tomsk, Russische Föderation

Gutachter: Prof. Dr. Ljudmila A. Bordag

Gutachter: Prof. Dr. Sabine Pickenhain

Gutachter: Prof. Dr. Rüdiger Frey

Gutachter: Prof. Dr. Iwan P. Gawriljuk

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 2005



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Modelle eines Preisbildungsprozesses bei einem nicht idealen Markt</b>	<b>11</b>
2.1	Begriff des idealen Marktes als Hauptvoraussetzung bei der Modellbildung . . . . .	11
2.2	Verallgemeinerungen des Black-Scholes-Modells . . . . .	14
2.2.1	Ein nichtkonstantes Verhalten der Volatilität . . . . .	14
2.2.2	Berücksichtigung von Transaktionskosten und Steuern bei der Modellbildung . . . . .	18
2.2.3	Einfluß der Illiquidität von Märkten auf den Preisbildungsprozess . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Untersuchung der Symmetrieeigenschaften eines nichtlinearen Modells eines illiquiden Marktes</b>	<b>45</b>
3.1	Bestimmung der Lie-Algebra für die Modellgleichung (3.1) . . . . .	46
3.1.1	Die wichtigsten Definitionen und Bezeichnungen . . . . .	46
3.1.2	Einführung von Jet-Räumen und Definition einer Symmetriegruppe für eine Differentialgleichung . . . . .	48
3.1.3	Aufbau der Lie-Algebra und Untersuchung ihrer Eigenschaften für die Gleichung (3.1) . . . . .	52
3.2	Bestimmung der Lie-Gruppe der Symmetrien für die Modellgleichung	60
3.2.1	Endliche Gleichungen für die Symmetriegruppe $G_\Delta$ . . . . .	60
3.2.2	Unabhängige Invarianten der Symmetriegruppe $G_\Delta$ . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Invariante Lösungen der Modellgleichung</b>	<b>65</b>
4.1	Reduzierte Modellgleichung und ihre Lösungen . . . . .	65
4.1.1	Reduktion der Modellgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	65
4.1.2	Einfache Familien invarianter Lösungen . . . . .	67

4.1.3	Implizite Form der invarianten Lösungen der reduzierten Gleichung (4.12)	69
4.2	Extraktion expliziter invarianter Lösungen	72
4.2.1	Bestimmung der Parameterbereiche, die eine Inversion der impliziten Funktionen (4.30), (4.31) erlauben	72
4.2.2	Explizite Lösungen	75
4.3	Eigenschaften der expliziten Lösungen	81
4.3.1	Die asymptotische Entwicklung bei $S \rightarrow 0$	81
4.3.2	Die asymptotische Entwicklung der expliziten Lösungen (4.61) bei $S \rightarrow \infty$	82
4.3.3	Abhängigkeit der Lösungsfamilie von den Integrationskonstanten	84
4.4	Zusammenfassung	85
<b>5</b>	<b>Verifikation grundlegender numerischer Methoden auf einer Klasse expliziter Lösungen</b>	<b>87</b>
5.1	Das explizite Verfahren	89
5.1.1	Wichtige Begriffe und Bezeichnungen	89
5.1.2	Ein Beispiel der expliziten Differenzenmethode für eine lineare partielle parabolische Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten	91
5.1.3	Die explizite Differenzenmethode für die nichtlineare Modellgleichung	94
5.1.4	Ergebnisse der numerischen Berechnungen im nichtlinearen Fall	97
5.2	Das implizite Verfahren	103
5.2.1	Aufbau des numerischen Schemas für die Modellgleichung (3.1)	103
5.2.2	Ergebnisse der numerischen Approximation der expliziten Lösungen	105
5.2.3	Aufbau des numerischen Schemas "vorwärts" und ein numerischer Vergleich mit dem Schema mit "eingefrorenen" Koeffizienten	111
5.3	Zusammenfassung	114
<b>A</b>	<b>Beweis des Lemmas 4.2.1</b>	<b>115</b>
<b>B</b>	<b>Beweis des Satzes 4.2.1</b>	<b>117</b>
<b>C</b>	<b>Beweis des Lemmas 5.1.2</b>	<b>123</b>
<b>D</b>	<b>Herleitung der Black-Scholes-Formel und des Binomialmodells für europäische Optionen</b>	<b>125</b>

E Glossar	129
F Abkürzungen und Bezeichnungen	133
Literaturverzeichnis	135



# Kapitel 1

## Einleitung

Ein sich sehr stark entwickelndes Gebiet der angewandten Mathematik ist zur Zeit der Bereich der Finanzmathematik. Im Laufe der letzten 30 Jahre hat sich das Bild dieses Zweiges der Mathematik grundlegend verändert. Wenn früher als Hauptinstrumente bei der Untersuchung anstehender Probleme Methoden, welche aus Stochastik, Statistik oder Ökonometrie herrührten, herangezogen wurden, so ist dazu ein ganzes Spektrum neuer Methoden, welche normalerweise der mathematischen Physik, der geometrischen Analysis oder der klassischen Variationsrechnung zugeschrieben werden, hinzugekommen. Auch die numerischen Methoden haben einen neuen Impuls zur Weiterentwicklung erhalten, weil eine ganze Klasse von interessanten und zuvor nicht untersuchten Problemen aufgetreten sind.

Diese Entwicklung ist stark mit der Einführung neuer Modelle bei der Beschreibung der Preisbildung von Finanzderivaten verbunden. Der Prozess der Modellbildung ist noch nicht abgeschlossen, viele der Modellvoraussetzungen sind noch in der Diskussion. Diese Tatsache sollte man auf jedem Fall im Auge behalten, wenn man diese Modelle mathematisch untersucht. Hier ist es sehr wichtig zu wissen, welche der Voraussetzungen sehr starr sind, und welche Annahmen noch veränderbar sind, welche Voraussetzungen über die eingehenden Parameter gemacht werden können, und welche kaum akzeptabel sind. Hier liegt der größte Unterschied zu den Modellen, welche z.B. in der Physik auftreten, wo man die Glaubwürdigkeit des Modells fast immer mit einem Experiment überprüfen und somit die Grenzen der Anwendbarkeit des Modells ausloten kann. Ökonomische Experimente sind kaum möglich bzw. bezahlbar, deswegen verlangt der Prozess der Modellbildung viel Erfahrung und Vorsicht. Einen Überblick über die neuesten Modelle werden wir in Kapitel 2 geben. Dieser Überblick wird hilfreich sein zu verstehen, welche Typen von Gleichungen entstehen können, und wie spezifisch jedes von diesen Modellen ist.

Diese Arbeit ist einer Verallgemeinerung des bekannten Black-Scholes-Modells gewidmet, welches eines der erfolgreichsten Modelle zur Optionspreisbewertung

darstellt. Die Hauptmethoden, die wir zur Untersuchung eines der neuesten Modelle benutzen, liegen im Bereich des geometrischen Analysis.

Eine der wichtigsten Instrumente des geometrischen Analysis ist die Methoden der Theorie der Lieschen Gruppen in Anwendung auf Differentialgleichungen. Die Untersuchung der algebraischen und geometrischen Strukturen, welche die gegebene Gleichung besitzt, erlaubt ein wesentlich besseres Verständnis des zu modellierenden Prozesses. Andererseits erlaubt die Bestimmung der Symmetrien einer Differentialgleichung in einigen Fällen, auch Klassen von invarianten Lösungen zu finden. In der Mehrzahl der Fälle, sowohl für gewöhnliche wie auch für partielle Differentialgleichungen, liegt die Ursache für die Existenz der expliziten Lösungen im Vorhandensein einer Symmetrie. Bei weitem nicht alle nichtlinearen Differentialgleichungen besitzen eine nichttriviale Symmetriegruppe. Somit kann dieses Verfahren nicht als universell angesehen werden, aber in den Fällen wo es anwendbar ist, bringt es sehr gute Ergebnisse.

Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit sind: die abschließende Untersuchung der algebraischen Struktur der Modellgleichung (3.1), die Berechnung der funktional unabhängigen Invarianten, das Auffinden der endlichen Gleichungen der Lie-Punktsymmetriegruppe der Gleichung, die Reduktion der Modellgleichung unter Ausnutzung von Symmetrien, die Extraktion einiger Klassen expliziter Lösungen, die Untersuchung der Eigenschaften dieser Lösungen, die Verifikation grundlegender numerischer Verfahren am Beispiel dieser expliziten Lösungen.

Die Dissertation ist wie folgt gegliedert.

Im Kapitel 2 werden wir eine Reihe von Modellen betrachten, in welchen verschiedene Autoren versucht haben, die Komplexität des Marktes zu berücksichtigen. Wenn man die Transaktionskosten oder die Illiquidität des Marktes in Betracht zieht, wird man meistens auf eine nichtlineare Differentialgleichung vom Typ

$$u_t + \frac{1}{2}\Phi(S, t, u_S, u_{SS})u_{SS} = 0 \quad (1.1)$$

mit einer Funktion  $\Phi(S, t, u_S, u_{SS})$  geführt. Es gibt zur Zeit sehr wenige Modelle, die eine wesentlich andere Form haben (z.B. ein dreidimensionales Modell von Heston [33]). Die Modelle sind auch vom analytischen und geometrischen Gesichtspunkt aus sehr interessant, weil die Struktur der Gleichung (1.1) bis jetzt wenig untersucht wurde.

Im Kapitel 3 werden wir zunächst im Punkt 3.1 die grundlegenden Definitionen und Begriffe der Theorie der Lie-Gruppen erläutern. Dort stellen wir kurz eine Prozedur zum Aufbau einer Lie-Gruppe einer Differentialgleichung vor. Im Abschnitt 3.1.3 werden wir eine Lie-Algebra für die Modellgleichung (3.1) aufbauen. Anhand der gefundenen Erzeugenden der Lie-Algebra wird die entsprechende Lie-Gruppe der Gleichung im Abschnitt 3.2.1 aufgebaut. Die explizite Darstellung der Symmetriegruppe der Gleichung erlaubt es, die Invarianten dieser Gruppe zu



bestimmen, die Prozedur ist im Abschnitt 3.2.2 dargestellt.

Im Kapitel 4 wird zunächst mittels der Invarianten der Lie-Gruppe eine Transformation gefunden, welche die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert. Unter zusätzlichen Bedingungen an die Parameter wird die gewöhnliche Differentialgleichung im Abschnitt 4.2 vollständig integriert. Die gefundenen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung führen zu invarianten Lösungen der ursprünglichen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung. Im Abschnitt 4.3 werden die Eigenschaften dieser Lösungsfamilien untersucht.

Im Kapitel 5 werden wir gut bekannte numerische Verfahren auf die gegebene Gleichung anwenden. Die Aufgabe, eine gute numerische Methode für die Gleichung (3.1) zu finden, ist nicht trivial, da die höchste Ableitung nichtlinear in der Gleichung eingeht und mit einem kleinen Parameter multipliziert wird. Bis jetzt sind keine mathematisch streng bewiesenen Zugänge zur Betrachtung solcher Probleme bekannt. In unserem Fall haben wir die äußerst günstige Situation, dass explizite invariante Lösungen gefunden werden konnten. Wir können dies ausnutzen und bekannte empirische Qualitätskriterien an der gegebenen Klasse von Lösungen überprüfen. Im Abschnitt 5.1 haben wir eine explizite Methode betrachtet. Die Abschnitte 5.1.1, 5.1.2 umfassen die elementaren Definitionen und Methoden, welche in einem linearen Fall typischerweise verwendet werden. Im weiteren versuchen wir, diese bekannten Ergebnisse auf den nichtlinearen Fall zu übertragen und mögliche Stabilitätsbereiche numerisch zu untersuchen. Im Abschnitt 5.2 haben wir ein implizites Verfahren auf die nichtlineare Modellgleichung (3.1) angewandt. Der Abschnitt 5.2.3 enthält einige Modifikationen des impliziten Schemas. Für die Durchführung der numerischen Berechnungen wurde das Programmsystem MATHEMATICA (Version 5.0) gewählt. Diese Wahl ist wie folgt motiviert. Der Schwerpunkt der numerischen Experimente in dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung des qualitativen Verhaltens der üblichen numerischen Methoden. In dieser Hinsicht spielt die programmtechnische Seite eine untergeordnete Rolle. Programmierwerkzeuge sollten lediglich eine schnelle und vor allem bequeme Durchführung von numerischen Experimenten gewährleisten und die Wiederholbarkeit ermöglichen. Der ausschlaggebende Vorteil für die Wahl von MATHEMATICA war jedoch seine eingebaute Fähigkeit, mit beliebiger arithmetischer Präzision rechnen zu können. Rechnungen, bei denen ein starker Verlust an numerischer Präzision eintritt, erfordern aufwendige analytische Umformungen. Dies kann mit der genannten Wahl umgangen werden, was sich in anderen Programmiersprachen schwieriger gestaltet.

Im Anhang A ist der Beweis des Lemmas 4.2.1 durchgeführt. Der Anhang B beinhaltet den Beweis des Satzes 4.2.1. Im Anhang C ist der Beweis des Lemmas 5.1.2 explizit durchgeführt. Im Anhang D ist die Herleitung der Black-Scholes-Gleichung und des Binomialmodells angegeben.

Der Arbeit ist ein Glossar der wichtigsten ökonomischen Begriffe mit Erläuterungen beigelegt. Er ist im Anhang E zu finden.

Der Anhang F beinhaltet die Liste der wichtigsten eingeführten Bezeichnungen und Abkürzungen.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um allen, die mir auf dem Weg zu dieser Arbeit geholfen haben, Dank auszusprechen.

Mein ganz herzlicher Dank gilt Prof. Dr. Ljudmila A. Bordag (Universität Halmstad, Schweden) für ihre Betreuung, für zahlreiche fruchtbare Diskussionen, für ihr Vertrauen in mich und für die ständige Hilfe und Unterstützung.

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Sabine Pickenhain für die exzellenten Bedingungen am Lehrstuhl, für ein kollegiales Arbeitsklima und für professionelle Hinweise und Empfehlungen bedanken.

Weiter bin ich den Kollegen der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus, darunter besonders Prof. Dr. Michael Fröhner, für hilfreiche Konsultationen und Unterstützung dankbar.

Mein großer Dank gilt Prof. Dr. Rüdiger Frey (Universität Leipzig) für Gespräche und wertvolle Hinweise betreffs der Modellbildung des für mich neuen Feldes der Finanzmathematik.

Ferner möchte ich mich sehr herzlich bei Prof. Ivan P. Gawriljuk (BA Eisenach, Thüringen) für umfangreiche Konsultationen, die er mir während der letzten zwei Jahre meiner Arbeit gegeben hat, bedanken.

Bei Dr. sc. Boris N. Khoromskij (MPI Leipzig) möchte ich mich für zahlreiche Konsultationen und Diskussionen über aktuelle Probleme der numerischen Analysis bedanken.

Ich danke der Verwaltung der IDE-Sektion der Universität Halmstad, insbesondere dem Dekan Dr. Magnus Larsson, für die Möglichkeit eines Gastaufenthaltes an der Universität Halmstad. Ebenfalls danke ich Dr. Karl-Johan Bäckström, Leiter der Ma-Lab, und allen anderen Kollegen der Ma-Lab-Abteilung der IDE-Sektion für die freundliche Unterstützung.

Für die professionelle Unterstützung während meines Praktikums in der Abteilung "Zinskapitalmarkt/Quantitative Analyse" des Bankhauses HSBC Trinkaus und Burkhard bedanke ich mich bei Dr. Carsten Pätzold.

Schließlich möchte ich mich bei allen anderen bedanken, die durch ihre Bemühungen und ihre Hilfe meine produktive Arbeit ermöglicht haben: bei meiner Familie und meinen Freunden.

Diese Arbeit wurde von Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Brandenburg, HWP-Projekt 02014, unterstützt.

## Kapitel 2

# Mathematische Modelle eines Preisbildungsprozesses bei einem nicht idealen Markt

### 2.1 Begriff des idealen Marktes als Hauptvoraussetzung bei der Modellbildung

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Annahmen für das Black-Scholes-Modell aufgeführt, sowie die Gründe, die zu einer Verallgemeinerung des Black-Scholes-Modells zwingen. Man spricht von einem idealen Markt häufig in dem Sinne, dass ein Finanzmarkt einigen idealisierenden Annahmen genügt, die allerdings zulassen, auf einem Finanzmarkt perfekt zu funktionieren. Wir starten mit einem kurzen Exkurs in die Theorie des Wertpapiermanagments und eines idealen Finanzmarktes.

Die Hauptaufgabe des Kapitalmarktes besteht in der effizienten Allokation der Kapitalströme. Die Allokationsfunktion betrifft in erster Linie den Primärmarkt, an dem neu geschaffene Finanztitel plziert werden. Am Sekundärmarkt werden die bereits emittierten Wertpapiere zwischen den Marktteilnehmern gehandelt. Am Sekundärmarkt wird kein Mehrwert geschaffen, aber es wird ein Vermögensverteilungseffekt erreicht, was die Bereitschaft, Wertpapiere am Kapitalmarkt zu erwerben, erhöht. Auf dieser Weise ergeben sich Rückkopplungen zur Allokation am Primärmarkt [73].

Die Allokationseffizienz hängt in erster Linie von der Preisbildung auf dem Kapitalmarkt ab. Die wegweisenden Arbeiten von Markowitz, Sharpe, Lintner, Mossin, Black und Scholes haben dazu geführt, dass das Wertpapiermanagment in den letzten 30-40 Jahren grundlegende Veränderungen erfahren hat.

Bis zum Ende der fünfziger Jahren bestand eine Bewertungstheorie nur in

Ansätzen. Um die theoretische Beschäftigung mit der Wertpapieranalyse zu ermöglichen, wurde das Modell eines *vollkommenen* Kapitalmarktes eingeführt. Dieses Modell hat sich als sehr fruchtbar erwiesen und läßt sich wie folgt charakterisieren.

Ein vollkommener Kapitalmarkt liegt vor, wenn

1. keine Transaktionskosten, Steuern oder andere Friktionen existieren,
2. alle Wertpapiere beliebig teilbar sind, d.h. dass man einen beliebigen Anteil eines Papiers kaufen oder verkaufen kann,
3. vollständiger Wettbewerb herrscht, d.h. kein einzelner Marktteilnehmer den Preis eines Wertpapiers beeinflussen kann,
4. sämtliche Informationen allen Marktteilnehmern gleichzeitig und kostenlos zur Verfügung stehen,
5. keine Einschränkungen beim sogenannten “short-selling” existieren, d.h. dass man kurzfristig Wertpapiere verkaufen kann, die man gar nicht besitzt,
6. sich alle Anleger rational verhalten.

Außerdem werden Wertpapiere in den Modellen meist nur auf ihre finanzielle Dimension reduziert, ungeachtet ihrer rechtlichen Relevanz [73].

Die Entwicklung der Bewertungstheorie führte zur Möglichkeit, neue Arten von Wertpapieren nach einem Baukastenprinzip einzuführen. So kamen zu klassischen Wertpapierkategorien wie Aktien, Anleihen und Optionsanleihen neue, wie Kuponanleihen, Optionen, Swaps usw. hinzu, welche zur Zeit unter dem Sammelbegriff *Finanzderivate* auftreten. Sie ermöglichen die Erzeugung beliebiger Risikoprofile und erlauben eine wesentlich größere Flexibilität für die Marktteilnehmer.

In den siebziger Jahren wurde das bahnbrechende Prinzip eines *arbitragefreien* Marktes eingeführt. Dieser Prinzip revolutionierte frühere Gleichgewichtsanalysen und erlaubte die Entwicklung neuer vollständiger Gleichgewichtsmodelle. Unter *Arbitrage* versteht man einen risikolosen Gewinn. Auf einem idealen Finanzmarkt, in dem unter anderem alle Investoren denselben Informationsstand haben und verzögerungsfrei handeln können, sollte es keine Arbitragemöglichkeit geben. Andernfalls würde jeder Investor versuchen, einen risikolosen Gewinn mitzunehmen [23]. Dieses Prinzip wurde von Black und Scholes [5] und Merton [56] 1973 als fundamentale Grundlage zur Optionsbewertung erkannt. In diesen herausragenden Arbeiten wurde eine analytische Formel für die Preisbewertung von Derivaten hergeleitet. Im Jahre 1997 haben Scholes und Merton für diese Arbeit den Nobelpreis für Ökonomie erhalten. Später wurde das Prinzip der Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten von Ross [67] zur Aktienbewertung herangezogen.

Zur Zeit gibt es viele Modellansätze zur Bewertung von Optionen, aber relevante praktische Bedeutung haben nur zwei vollständige Gleichgewichtsmodelle erreicht: Das Black-Scholes-Modell [5] und das von Cox, Ross und Rubinstein entwickelte Binomialmodell [17]. Eine kurze Beschreibung der beiden Modelle ist im Anhang D dargestellt.

Bei beiden Modellen sind die grundlegenden Annahmen identisch. Der einzige, aber entscheidende, Unterschied liegt in der Annahme eines kontinuierlichen Aktienhandels im Black-Scholes-Modell im Vergleich zu einem diskreten Handel im binomialen Modell.

Bei der Herleitung des Black-Scholes-Modells gelten folgende Voraussetzungen.

1. Es liegt ein vollkommener Kapitalmarkt vor.
2. Der Handel mit Wertpapieren ist stetig.
3. Es gibt keine risikolose Arbitragemöglichkeit.
4. Der risikofreie Zinssatz  $r$  ist über die ganze Laufzeit der Derivate bekannt und konstant.
5. Der Aktienkurs  $S = \{S_t, t \geq 0\}$  folgt einem stochastischen Prozess - einer geometrischen Brownschen Bewegung - beschrieben durch die Gleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.1)$$

mit einer konstanten erwarteten Wachstumsrate des Aktienkurses  $\mu$ , einer konstanten Varianz des Aktienkurses  $\sigma^2$  und einem Wiener-Prozess  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ . Die Variable  $t$  ist die Zeit.

6. Während der Laufzeit der Option werden keine Dividenden ausgezahlt.

Unter diesen Voraussetzungen hängt der Optionswert nur vom Aktienkurs  $S_t$ , von der Zeit  $t$  und von den Parametern  $r$ ,  $\sigma$ , die als konstant angenommen werden, ab. Im Anhang D stellen wir die Herleitung der Black-Scholes-Differentialgleichung zur Preisbewertung einer europäischen Call-Option (Kaufoption) vor.

Die Voraussetzungen (1)-(6) ermöglichten einerseits den Aufbau eines der erfolgreichsten Modelle, zeigten andererseits auch explizite Wege zur möglichen Verallgemeinerungen dieses Modells. Die Variationen einer oder mehrerer dieser Hypothesen führen zu neuen Modellen, die komplexere Vorgänge des realen Marktes besser berücksichtigen können.

Wir werden der Reihe nach die wichtigsten Annahmen und deren Verallgemeinerungen besprechen, welche zu aktuell betrachteten Modellen führen.

## 2.2 Verallgemeinerungen des Black-Scholes-Modells

### 2.2.1 Ein nichtkonstantes Verhalten der Volatilität

Eine wichtige Rolle in der Optionspreisbewertung spielt der Modellparameter  $\sigma$ , welcher auch die *Volatilität* eines Finanzaktivums genannt wurde. Die Volatilität ist ein Maß für die zu erwartende Größe der zufälligen Schwankungen der Rendite um ihren Erwartungswert und wurde im Black-Scholes-Modell als konstant angenommen. Eine, als Standard anzusehende, Prozedur zur Berechnung einer Volatilität stützt sich auf historische Daten [37]. Im Gegensatz zur historischen Volatilität, die die vergangene Entwicklung einer Aktie widerspiegelt, wird oft eine *implizite Volatilität* (auch *implizierte Volatilität* genannt) benutzt, die eine Information über den aktuellen Zustand eines Wertpapiers auf dem Markt enthält. Diese Volatilität wird aus dem laufenden Wert, dem am Markt notierten Optionspreis, implizit berechnet. In einem fixierten Zeitpunkt  $t$  wird eine Option mit dem Preis  $S$  eines zugrundeliegenden Wertpapiers zum bestimmten Preis  $V_t$  gehandelt. Wir können die Black-Scholes-Formel (D.6) invertieren und eine implizite Volatilität  $\sigma^*$  finden. Betrachtet man Optionen mit verschiedenen Basispreisen, aber mit ansonsten identischen Parametern, so stellt man fest, dass sich die implizite Volatilität  $\sigma^*$  mit dem Basispreis ändert. Dieses Phänomen nennt man den *Smile-Effekt*. Außerdem ist ein solches Verhalten der impliziten Volatilität charakteristisch für die meisten am Markt gehandelten Optionen: die Volatilität nimmt ab, wenn der Basispreis steigt. Analog beobachtet man die Abhängigkeit der impliziten Volatilität von den Laufzeiten der Optionen, welche man als *Term-Structure* der Volatilität bezeichnet. Smile-Effekt und Term-Structure zeigen, dass auf dem Markt mit hoher Wahrscheinlichkeit eine nichtkonstante Volatilität vorliegt.

Seit Ende der achtziger Jahre entstanden Modelle mit einer Volatilität, die einem stochastischen Prozess folgt,

$$d\sigma = p(S, \sigma, t)dt + q(S, \sigma, t)d\overline{W}_t,$$

wobei  $d\overline{W}_t$  eine Brownsche Bewegung ist, die mit der Brownschen Bewegung  $dW_t$  aus (2.1) korreliert,

$$(dW_t d\overline{W}_t) \equiv \varrho_{W\overline{W}} dt. \quad (2.2)$$

Wie Hobson in seinem Artikel [34] bemerkte, wurden im Laufe der Zeit Modelle mit stochastischer Volatilität vorgeschlagen, welche eher auf Intuition und der Möglichkeit einfacher Interpretation, als auf empirischen Erfahrungen mit der auf dem Markt vorhandenen Volatilität beruhen. Die bedeutendsten Modelle wurden von Hull und White [38] und Heston [33] entwickelt.

Hull und White haben angenommen, dass die momentane Varianz  $v$ , d.h. das Quadrat der Volatilität,  $v = \sigma^2$ , einem ähnlichen stochastischen Prozess folgt, wie eine Aktie selbst,

$$dv = \nu v dt + \vartheta v d\overline{W}_t,$$

mit Funktionen  $\nu(\sigma, t)$  und  $\vartheta(\sigma, t)$ , die nicht vom Aktienkurs  $S$  abhängen. Im Fall  $\varrho_{W\overline{W}} \equiv 0$  (2.2), d.h. wenn  $W_t$  und  $\overline{W}_t$  unabhängige Wiener'sche Prozesse sind, haben Hull und White eine Formel in Form einer Reihe für die Preisbewertung einer Call-Option mit stochastischer Volatilität abgeleitet. In diesem Modell hängt ein zu bestimmender Optionspreis vom Preis der Option, welcher nach dem Black-Scholes-Modell berechnet wurde, und von einem zusätzlichen Parameter - von dem Mittelwert der Varianz,

$$\overline{v} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t) dt,$$

ab. In dem Fall, wo ein Aktienpreis und eine Volatilität miteinander korrelieren, d.h. wo für sie  $\varrho_{W\overline{W}} \neq 0$  gilt, ist die Analyse der Optionspreisbewertung komplizierter und wurde mit numerischen Methoden durchgeführt [38], [39]. Eine wichtige Eigenschaft des Marktes, welche bei der Untersuchungen benutzt wurde, ist die Annahme einer risikoneutralen Welt. Somit kann man aus der Put-Call-Parität direkt einen Put-Optionspreis berechnen.

Eine weitere Möglichkeit wurde von Heston [33] vorgeschlagen. Er betrachtet eine Volatilität  $\sigma$ , die mit dem Aktienkurs korreliert ist. Sein Modell basiert auf einem stochastischen Prozess nach Ornstein-Uhlenbeck,

$$d\sigma = -\nu\sigma dt + \vartheta d\overline{W}_t,$$

für die Volatilität mit einer beliebigen Korrelation  $\varrho_{W\overline{W}}$  zwischen den Prozessen  $d\overline{W}_t$  und  $dW_t$  in der Gleichung (2.1). Die Varianz  $v$  folgt in diesem Fall dem Prozess

$$dv = \kappa(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v}d\overline{W}_t$$

mit Konstanten  $\kappa, \theta$ . Der Autor hat ein effektives Verfahren für die Berechnung des Optionspreises mit Hilfe der charakteristischen Funktionen entwickelt. Diese Lösungstechnik kann bei verschiedenen Optionsarten, wie z.B. Bond-Optionen und Currency-Optionen, verwendet werden. Außerdem ist dieses Modell nicht nur für eine stochastische Volatilität nutzbar, sondern kann für andere Aufgaben angepasst werden. Im Modell von Polte [64] diente das Hestonmodell als Orientierung bei der Erweiterung des Modells von Frey [26] zur Modellierung eines stochastischen Verhaltens von Marktiliquidität. Da Heston für sein Modell die explizite Form der Lösungen beschrieben hat, kann dieses Modell für die Kontrolle der Richtigkeit numerischer Lösungen anderer Modelle, die auf dem Hestonmodell basieren, verwendet werden, wie dies in [64] bereits getan wurde.

Die Autoren Hull und White sowie Heston haben gezeigt, dass der Black-Scholes-Preis für die At-The-Money-Optionen überbewertet, und für die Deep-In- oder Deep-Out-The-Money-Optionen unterbewertet ist. Diese Eigenschaft der Black-Scholes-Formel ist z.B. in [37, S. 435ff] beschrieben. Die Preise der Optionen nach den vorgeschlagenen Modellen mit stochastischer Volatilität sind günstiger für At-The-Money-Optionen und teurer für Deep-In- und Deep-Out-The-Money-Optionen. Somit erhält man mit diesem Modell bessere Ergebnisse als mit dem Black-Scholes-Modell.

Als ein bekannter Nachteil von Modellen mit einer stochastischen Volatilität ist deren Unvollständigkeit hervorzuheben. Der Zufallsparameter  $\sigma$  ist ein Risikoparameter und braucht eine zuverlässige Hedgingstrategie, welche in diesem Fall schwer zu entwickeln ist. Einen sehr guten Überblick über die Modelle mit stochastischer Volatilität haben Frey [24] und Hobson [34] gegeben.

Wie schon bemerkt, hängt die implizite Volatilität  $\sigma^*$  vom Basispreis  $K$  und von der Laufzeit  $T$  einer Option ab. Das bedeutet, dass diese Volatilität lokal als eine Funktion in Abhängigkeit von den beiden Variablen  $K$  und  $T$  betrachtet werden kann. Somit entsteht das inverse Problem der Optionsbewertung: Zu finden ist eine lokale Volatilitätsfunktion  $\sigma^*(S, t)$ , welche die Smile-Kurve rekonstruiert. In den Arbeiten von Derman und Kani [18] und Rubinstein [68] wurde dieses Problem im diskreten Fall, das heißt auf der Basis des Binomialmodells von Cox, Ross und Rubinstein [17], untersucht und es wurde eine Verallgemeinerung dieses diskreten Modells begründet.

Dupire hat in seiner Arbeit [19] als erster das inverse Problem für eine Verallgemeinerung der Black-Scholes-Gleichung und somit einen stetigen Fall untersucht. Eine der zentralen Voraussetzungen dieser Arbeit war, dass in jedem Zeitpunkt  $t$  der Optionspreis  $C(K, T)$  für jeden Basispreis  $K > 0$  und für jede Laufzeit  $T \geq t$  bekannt ist und eine stetige Funktion seiner Argumente ist. Die Annahme einer konstanten Volatilität, wie im Black-Scholes-Modell vorausgesetzt, wurde durch eine lokale Volatilitätsfunktion  $\sigma(S, t)$

$$dS = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dW_t$$

ersetzt, wobei  $dW_t$  wie früher ein Wiener-Prozess ist. Die entsprechende Differentialgleichung läßt sich wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S, t)S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + S\frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0, \\ C(S, T) &= (S - K)^+. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Der Autor hat in [19] gezeigt, dass die Fläche  $C(K, T)$  für jedes  $T > t$  eine Dichtefunktion  $f_T$  definiert. Mit Hilfe dieser Funktion hat er danach eine adjungierte Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial T}C(K, T) = \frac{1}{2}\sigma^2(K, T)K^2\frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2} + c_1K + c_2 \tag{2.4}$$



für die Black-Scholes-Gleichung gewonnen. Ohne Arbitragemöglichkeit sind die Konstanten  $c_1, c_2$  gleich Null. Folglich kann die Volatilitätsfunktion aus (2.4) explizit dargestellt werden,

$$\sigma^2(K, T) = \frac{2 \frac{\partial}{\partial T} C(K, T)}{K^2 \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(K, T)}.$$

Das Modell von Dupire wird *implizites deterministisches Volatilitätsmodell* genannt. Dieses Modell hat den Vorteil, dass die wesentliche Eigenschaft des Black-Scholes-Modells - die Vollkommenheit des Marktes - erhalten bleibt und alle Finanzprodukte am Markt einen eindeutig bestimmbaren Preis haben.

Dennoch sind in der Realität Optionspreise nur für diskrete Laufzeiten und beschränkte Anzahl von Basispreisen verfügbar. Für manche Derivate sind Optionswerte nur für wenige oder sogar nur für einzelne Laufzeiten vorhanden, so dass eine korrekte Interpolation wegen fehlender Informationen unmöglich ist.

Bouchouev und Isakov haben in ihrer Arbeit [8] vorgeschlagen, die Volatilität als zeitunabhängige Funktion zu betrachten,

$$\sigma = \sigma(S).$$

Es wurde folgendes inverse Problem formuliert:

Man bestimme die Volatilitätsfunktion  $\sigma(S)$  so, dass die Lösung von (2.3) mit verschiedenen Basispreisen  $K$  der Bedingung

$$C(S^*, t^*; K) = C^*(K, T)$$

genügt, wobei  $C^*(K, T)$  den am Markt gehandelten Preis für Optionen mit dem entsprechenden Basispreis  $K$  bezeichnet. Die Bezeichnungen  $S^*, t^*$  weisen darauf hin, dass ein fixierter Zeitpunkt betrachtet wird.

Mit Hilfe der Distributionentheorie und Methoden der mathematischen Physik wurde in [8] zunächst wiederum eine adjungierte Gleichung ähnlich zu (2.4) abgeleitet,

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2(K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - r K \frac{\partial C}{\partial K},$$

wobei  $\tau = T - t$  die verbleibende Zeit bis zur Ausübung der Option ist. Als Hauptergebnis wurde eine Fredholmsche Integralgleichung zur Bestimmung der Volatilitätsfunktion hergeleitet,

$$I\sigma(K) = C^*(K, T) - (S - K)^+ - \int_0^\infty I_1\sigma(K, \nu) d\nu - \int_K^\infty I_2\sigma(K, \nu) d\nu, \quad (2.5)$$

wobei die Funktionen  $I\sigma(K)$ ,  $I_1\sigma(K, \nu)$  und  $I_2\sigma(K, \nu)$  eine Integraldarstellung haben. Diese Gleichung läßt sich numerisch, z.B. iterativ, lösen [8], [9].

Isakov und Bouchouev haben gezeigt, dass die Kurven der impliziten Volatilität und der lokalen Volatilitätsfunktion, welche nach (2.5) bestimmt werden können, die gleiche Form haben bis auf den Unterschied, dass die lokale Volatilitätsfunktion schneller fällt. Die Fredholmsche Gleichung (2.5) ist jedoch von komplizierter Struktur, sie lässt sich schwer handhaben.

Hier haben wir die wichtigsten Wege der Berücksichtigung eines nichtkonstanten Verhaltens der Volatilität aufgezeigt, sowie die daraus resultierenden Modelle beschrieben. Ein weiterer wichtiger Aspekt, der bei einer Modifikation des Black-Scholes-Modells berücksichtigt werden muss, ist die Tatsache, dass der Handel mit Wertpapieren mit Transaktionskosten verbunden ist.

### 2.2.2 Berücksichtigung von Transaktionskosten und Steuern bei der Modellbildung

Der Handel mit Derivaten ist wegen der starken zufälligen Komponente mit einem vergleichsweise hohen finanziellen Risiko verbunden. Zur Verringerung und zur Kontrolle dieses Risikos werden verschiedene Hedgingstrategien, sowie Portfolio-Versicherungen verwendet. Die dynamischen Hedgingstrategien entsprechen einer stetigen Anpassung eines Portfolios.

In den letzten Jahren verwendete man häufiger den Begriff einer *Replikationsstrategie*. Man betrachtet ein Portfolio, das aus einer risikofreien Anleihe  $B_t$  und aus Aktien  $S_t$  besteht,

$$P_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t. \quad (2.6)$$

Das Paar  $(\alpha_t, \beta_t)$  heißt eine *Handelsstrategie* und bedeutet die Anzahl von Aktien bzw. Bonds im Portfolio. Man spricht von einer Replikationsstrategie  $(\alpha_t, \beta_t)$  eines Derivats  $V_t$  mit einer Payoff-Funktion  $V_T = h(S)$ , wenn der Wert des Portfolios  $P_t$  im Zeitpunkt  $T$  mit der Funktion  $h(S)$  übereinstimmt,

$$h(S) = P_T.$$

Das bedeutet einerseits, dass das Portfolio  $P_t$  das Derivat  $V_t$  repliziert. In Abwesenheit von einer Arbitragemöglichkeit muss ebenso  $V_t = P_t$  für beliebiges  $t < T$  gelten. Andererseits nennt man  $V_t$  die *Hedging-Kosten* eines Portfolios. In einem vollkommenen Markt unter den Voraussetzungen 1-6 (Seite 13) des Black-Scholes-Modells sind die Hedging-Kosten immer gleich dem Preis des vorgegebenen Derivats. Die Veränderung einer oder mehrerer Hauptvoraussetzungen des Black-Scholes-Modells kann zu Unterschieden zwischen Hedging-Kosten und entsprechenden Preisen von Derivaten führen.

Das Black-Scholes-Modell [5] wurde ohne Berücksichtigung der Transaktionskosten hergeleitet (Bedingung 1, Seite 12). Die Funktionsfähigkeit eines Kapitalmarktes hängt aber von der Höhe der Transaktionskosten ab. Solche Kosten beein-

trächtigen die Anpassungen der Marktpreise an neue Informationen und in Wirklichkeit ist jeder Kauf und Verkauf auf dem Markt immer mit zusätzlichen Ausgaben verbunden. Eine Anwendung einer dynamischen Hedgingstrategie impliziert folglich unbegrenzte Transaktionskosten. Eine stetige Hedgingstrategie, welche in diskreter Zeit angewandt wurde, kann jedoch zu einem zusätzlichen Risikofaktor führen.

In diesem Abschnitt werden wir die wichtigsten Untersuchungen darstellen, bei denen der Einfluß der Transaktionskosten in Betracht gezogen wurde.

Als erster hat 1985 Leland [52] eine Verallgemeinerung des Black-Scholes-Modells unter Berücksichtigung von Transaktionskosten untersucht. Er hat in seiner Arbeit zunächst eine ausführliche Analyse des klassischen Delta-Hedging durchgeführt. Die wichtigsten Eigenschaften, die wir jetzt beschreiben, hat er auf das neue Modell übertragen.

Der Autor hat ein Portfolio  $P_t$  und eine Replikationsstrategie einer europäischen Call-Option  $C_t$  betrachtet, somit hat er  $P_T = C_T = (S - K)^+$  angenommen. Er hat eine Größe

$$\Delta H_t = \Delta P_t - \Delta C_t$$

mit  $\Delta P_t = P_{t+\Delta t} - P_t$ ,  $\Delta C_t = C_{t+\Delta t} - C_t$  eingeführt, welche er als *Hedgingfehler* bezeichnet hat.  $\Delta H_t$  ist eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert gleich 0 und der Varianz von der Ordnung  $O(\Delta t^2)$ . Die Größe  $\Delta t$  bedeutet das Zeitintervall zwischen den Transaktionen während des Hedgings. Dabei wird angenommen, dass dieses Zeitintervall  $\Delta t$  im voraus bestimmt wird und während der ganzen Laufzeit der Option konstant bleibt. Das Portfolio wird am Ende jeder Zeitspanne  $\Delta t$  neu angepasst. Der eingeführte Hedgingfehler  $\Delta H_t$  korreliert mit den Marktdaten nur im Endpunkt des Zeitintervalls  $\Delta t$  und bleibt innerhalb des Intervalls unberührt davon. Leland hat überprüft, dass bei solchen Annahmen der Hedgingfehler fast sicher gegen Null geht. Der Wert des Portfolios wird fast sicher dem angestrebten Wert  $(S - K)^+$  bei  $\Delta t \rightarrow 0$  entsprechen.

Ausgehend von seinen Untersuchungen hat Leland folgende Aufgabestellung formuliert:

*Man finde eine entsprechende Replikationsstrategie, die die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Die Transaktionskosten sollen beschränkt bleiben, wenn das Zeitintervall  $\Delta t$  kleiner wird.*
2. *Die Strategie soll einen Optionspreis mit Berücksichtigung von Transaktionskosten mit einem Fehler  $\Delta H_t$  replizieren, der mit den Marktdaten innerhalb des Intervalls  $(t, t + \Delta t)$  nicht korreliert und gegen Null geht, wenn das Zeitintervall  $\Delta t$  kleiner wird.*

3. Der erwartete Umsatz und die entsprechenden Transaktionskosten sollen sich leicht bestimmen lassen.

Leland hat gezeigt, dass sich bei einem einfachen Zugang, in dem man im Großen und Ganzen bei der klassischen Hedgingstrategie bleibt und nur eine kleine Änderung zulässt, die aufgelisteten Eigenschaften nicht erfüllt werden können. Betrachtet man z.B. anstatt eines Anfangswertes einer Option  $C = C_0$  den Wert  $C = C_0 + \varepsilon$ , welcher mit einer Art von Zusatzsteuer belegt wird und wird das Portfolio (2.6) einem klassischen Delta-Hedging unterzogen, so könnte man denken, dass man durch die Größe der Zusatzsteuer  $\varepsilon$  die Transaktionskosten berücksichtigen kann. Aber die Berechnungen von Leland zeigen, dass diese Hedgingstrategie keine der vorgegebenen Eigenschaften besitzt.

Dem Autor ist es gelungen, eine modifizierte Strategie, die diese Eigenschaften besitzt, vorzuschlagen. Er hat anstatt einer konstanten Volatilität die Größe

$$\hat{\sigma}^2(\sigma^2, k_L, \Delta t) = \sigma^2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_L}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \quad (2.7)$$

eingeführt, wobei die Konstante  $k_L$  den proportionalen Transaktionskosten entspricht und  $\sigma$  eine Volatilität der Aktie darstellt. Leland hat die wichtigsten Ergebnisse in folgendem Theorem zusammengefasst:

**Theorem 2.2.1** (Leland, 1985). Die Replikationsstrategie  $\alpha_t = \partial \hat{C} / \partial S$ ,  $\beta_t = \hat{C} - S \partial \hat{C} / \partial S$ , wobei  $\hat{C}$  die Lösung einer modifizierten Black-Scholes-Gleichung

$$\frac{S^2 \hat{\sigma}^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial S^2} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial t} - r \left( \hat{C} - \frac{\partial \hat{C}}{\partial S} S \right) = 0, \quad (2.8)$$

mit Berücksichtigung von Transaktionskosten entsprechend (2.7) ist, führt fast sicher zu dem Portfoliowert  $(S - K)^+$ , wenn  $\Delta t \rightarrow 0$  gilt.

Im Beweis dieses Satzes wurde vorausgesetzt, dass  $\hat{C}_{SS} > 0$  gilt. Das bedeutet, dass der Autor nur solche Optionen betrachtet, die eine konvexe Payoff-Funktion haben. Dennoch spielt das Modell von Leland eine wichtige Rolle in der Finanzmathematik. Diese Arbeit hat zu neuen Ideen geführt und zum besseren Verständnis beigetragen, sowie viele weitere Untersuchungen stimuliert. Offenkundige Nachteile dieses Modells sind die Beschränkung der Untersuchungen auf Optionsarten mit einem konvexen Payoff und die Möglichkeit nur eine Option im Portfolio zu betrachten.

Boyle und Vorst [10] haben im Jahre 1992 eine Hedgingstrategie für ein Binomialmodell betrachtet, welche zusätzlich auch Transaktionskosten berücksichtigt.

Die Untersuchung in [10] ist ähnlich zu der Untersuchung von Merton, die im Artikel [57] dargestellt ist. Merton hat in seiner Arbeit einen Einperiodenfall in dem Binomialmodell betrachtet. Im Vergleich dazu haben Boyle und Vorst [10] mehrere Perioden betrachtet. Dieser Umstand führt ihre Untersuchungen in die Nähe von Leland's Arbeit. Sie haben eine modifizierte Volatilität völlig analog zu der in [52] von Leland eingeführten Volatilität angenommen, d.h.  $\hat{\sigma}^2$  ist definiert als

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 + \frac{2k_L\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{T}} \right), \quad (2.9)$$

wobei  $T$  die Laufzeit einer Option und  $n$  die Periodenanzahl bis zum Ausübungstag der Option ist. Aus der Put-Call-Parität, welche auch in diesem Fall gilt, haben die Autoren eine Methode für die Bestimmung des Put-Optionspreises hergeleitet. Außerdem haben sie sowohl eine Long-Position wie auch eine Short-Position des Besitzers einer europäischen Option betrachtet. Dabei haben sie die Berechnung der Volatilität einer Short-Position-Option  $\hat{\sigma}$  wie folgt vorgeschlagen,

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left( 1 - \frac{2k_L\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{T}} \right). \quad (2.10)$$

In diesem Fall wurden zusätzliche Bedingungen eingeführt, unter welchen die negativen Werte von  $\hat{\sigma}$  in (2.10) ausgeschlossen sind.

Eine Erweiterung des Modells von Leland für Portfolios mit mehreren Optionen wurde von Hoggard, Whalley und Wilmott in [36] vorgeschlagen. Die Hauptvoraussetzungen für dieses Modell sind ähnlich wie beim Black-Scholes-Modell, d.h. es wird ein vollkommener Markt außer der Bedingung 1 (Seite 12) betrachtet und die Bedingungen 1-6 (Seite 13) gefordert. Die Transaktionskosten werden proportional zum Währungswert der Transaktionen angenommen, d.h. wenn  $n$ -Anteile jeder zum Preis  $S$  gehandelt werden, betragen die Transaktionskosten  $k_{\{HWW\}} nS$ .

Um den Risikofaktor des diskreten Handels zu berücksichtigen, wurde von den Autoren ein erwarteter Wert des Portfolios im Unterschied zum aktuellen Wert eingeführt. Dieser erwartete Wert wurde gleich dem Depotwert einer Bank mit dem risikofreien Zinssatz  $r$  vorausgesetzt. Das bedeutet, dass der Händler von seinem Portfolio  $P$  so viel zu erhalten erwartet, als hätte er das Geld in einer Bank angelegt

$$E[dP] = rP. \quad (2.11)$$

$E[dP]$  bedeutet einen Erwartungswert der Änderung im Portfoliowert.

Mit der Anwendung üblicher Argumentation vom Itô-Lemma [44] und einer risikoneutralen Voraussetzung (2.11) haben die Autoren eine nichtlineare Differentialgleichung abgeleitet

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} k_{\{HWW\}} \sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| + r \left( S \frac{\partial V}{\partial S} - V \right) = 0, \quad (2.12)$$

wobei mit  $V(S, t)$  der Optionspreis und mit  $\Delta t$  das Zeitintervall zwischen den Schritten des Hedginghandels bezeichnet wird. Für eine einzelne Call- oder Put-Option ist nach dem Black-Scholes-Modell bekannt, dass  $\partial^2 V / \partial S^2 > 0$  gilt. Hoggard, Whalley und Wilmott haben angenommen, dass sich für die einzelne Call- oder Put-Option mit Transaktionskosten diese Bedingung auch erfüllen läßt. In diesem Fall nimmt die Gleichung (2.12) die Form der von Leland im [52] entwickelten Differentialgleichung für eine einzelne Long-Option europäischer Art an,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} k_{\{HWW\}} \sigma \right) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \left( S \frac{\partial V}{\partial S} - V \right) = 0. \quad (2.13)$$

Der Optionswert  $V(S, t)$  ist zu einem Preis, welcher nach der Black-Scholes-Formel (D.6) berechnet wurde, identisch, wenn man  $\sigma$  im Black-Scholes-Modell durch die Volatilität  $\hat{\sigma}^2$  ersetzt

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 - 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} k_{\{HWW\}}.$$

Hoggard u.a. haben gezeigt, dass für eine einzelne Option in einer Short-Position mit einem positiven Wert  $\partial^2 V / \partial S^2$  ein Preis gilt, der nach der Black-Scholes-Formel (D.6) mit einer neuen Varianz  $\tilde{\sigma}^2$  berechnet wurde

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} k_{\{HWW\}}.$$

Der Wert

$$A_L = \frac{k_L}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}}$$

heißt eine *Leland-Zahl* und definiert ein Maß des Effektes der Transaktionskosten.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.13) (ohne diese zu lösen) haben die Autoren folgende Schlussfolgerungen gezogen. Wenn der Effekt der Transaktionskosten sehr hoch ist, d.h.  $A_L \gg 1$ , sollte der Zeitabstand  $\Delta t$  erhöht werden. Wenn  $A_L \ll 1$  gilt, ist der Optionspreis nur gering vom Transaktionskosteneffekt beeinflusst. Die letzte Ungleichung bestimmt ein realistisches Intervall für den Parameter  $A_L$ . Diese Auswahl von  $A_L \ll 1$  bedeutet, dass entweder die Transaktionskosten  $k_L$  relativ klein sind, oder der Zeitabstand  $\Delta t$  zwischen Hedgingtransaktionen relativ groß ist. In diesem Fall ist die Gleichung (2.12) mit der Bedingung  $\partial^2 V / \partial S^2 > 0$  ein korrekt gestelltes Problem. Diese Beschränkung gilt aber nicht für jedes Portfolio von Optionen.

Ein verbessertes Modell für eine Bewertung und ein Hedging eines Portfolios bei großen Transaktionskosten,  $A \geq 1$ , wurde im Jahre 1994 von Avellaneda und Parás [62] entwickelt. Die Autoren haben sich nicht auf eine konvexe Payoff-Funktion (d.h. die Bedingung  $\partial^2 V / \partial S^2 > 0$ ) beschränkt, wie es in [36], [52] der Fall war. In

diesem Artikel wurde eine Hedgingstrategie in Abhängigkeit von der Leland-Zahl  $A_L$  entwickelt.

Das Zeitintervall  $\Delta t$  wird fixiert, dies führt zum festgelegten Wert von  $A_L$ . Die zu untersuchende nichtlineare Differentialgleichung wird in [36] hergeleitet und läßt sich in allgemeiner Form wie folgt darstellen

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2(\Gamma)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \left( S \frac{\partial V}{\partial S} - V \right) = 0, \quad (2.14)$$

wobei  $0 < S < \infty$ ,  $t < T$  ist und  $V(S, t)$  eine Payoff-Funktion  $V(S, T) = h(S)$  hat. Das Ziel der Untersuchung war eine Hedgingstrategie für eine Short-Position von Optionen zu finden. Es wurde vorausgesetzt, dass  $\tilde{\sigma}^2$  durch

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 (1 + A_L \text{sign}(\Gamma)), \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \quad (2.15)$$

bestimmt wird. Die Autoren haben zwei Fälle der Gleichungen (2.14)-(2.15) betrachtet. Im ersten Fall, wenn  $0 \leq A_L < 1$  gilt, nimmt die Funktion  $\tilde{\sigma}^2(\Gamma)$  zwei verschiedene *positive* Werte an, entsprechend einer konvexen Payoff-Funktion, was gleichzeitig  $\Gamma > 0$  bedeutet, bzw. einer konkaven Payoff-Funktion, wenn  $\Gamma < 0$  gilt. Die Aufgabe (2.14)-(2.15) hat in diesen Fällen eine eindeutige, zweimal bezüglich  $S$  und einmal bezüglich  $t$  differenzierbare Lösung. Außerdem wurde gezeigt, dass die Lösung  $V(S, t)$  eine wachsende Funktion bezüglich  $A_L$  ist, wie es auch zu erwarten war, weil ein kleines Hedgingintervall  $\Delta t$  das Risiko reduziert, jedoch mehr Transaktionskosten impliziert.

Im zweiten Fall, wenn  $A_L \geq 1$  gilt, kann die Volatilität  $\tilde{\sigma}^2(\Gamma)$  in einigen Fällen verschwinden oder negativ sein. Für  $\Gamma \geq 0$  ist  $\tilde{\sigma}^2(\Gamma)$  positiv und die gleichen Bedingungen wie im oben betrachteten Fall ( $0 \leq A_L < 1$ ,  $\forall \Gamma$ ) gelten. Folglich existiert eine eindeutige Lösung für optimale Hedging-Kosten  $V(S, t)$  unter Berücksichtigung von Transaktionskosten [36], [52]. Für negative Werte von  $\tilde{\sigma}^2(\Gamma)$  ist die Aufgabe (2.14)-(2.15) mathematisch inkorrekt gestellt und hat für allgemeine, nicht konvexe Payoff-Funktion  $h(S)$ , keine Lösung. In diesem Fall haben die Autoren eine neue Hedgingstrategie vorgeschlagen, die folgende wichtige Eigenschaften besitzt. Diese Strategie ist wegababhängig und basiert auf der Lösung  $V(S, t)$  eines Hindernisproblems wie folgt

$$\begin{aligned} V(S, t) &\geq h(S) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}(\Gamma)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

für alle  $S$  und  $t < T$ . Für eine Menge solcher  $(S, t)$ , für welche  $V(S, t) > h(S)$  ist und

$$V(S, T) = h(S) \quad (2.17)$$

erfüllt ist, gilt die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}(\Gamma)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \quad (2.18)$$

Wenn  $h(S)$  konvex ist, stimmt die Lösung des Hindernisproblems (2.16)-(2.18) mit einer Lösung, welche aus den Modellen von Leland [52] und von Hoggard, Whalley, Wilmott [36] bekannt ist, überein.

Avellaneda und Parás haben in [62] eine explizite Lösung des Hindernisproblems (2.16)-(2.18) für eine Reihe von wichtigen Beispielen von Optionsarten, wie z.B. für eine Cash-Or-Nothing-Option, hergeleitet. Auf Grund dieser Lösungen wurde von den Autoren eine neue Hedgingstrategie vorgeschlagen. Somit stellt diese Arbeit eine wichtige Fortsetzung des nichtlinearen Modells für Optionspreisbewertung mit Transaktionskosten dar, die von Leland [52] hergeleitet und von Hoggard u.a., [36], erweitert wurde.

Ein vollständig anderer Ansatz zur Untersuchung des Einflusses von Transaktionskosten auf die Optionspreisbewertung wurde zuerst von Hodges und Neuberger in [35] vorgeschlagen und später von Barles und Soner in [4] weiterentwickelt. Die Autoren haben die Methoden der Steuerungs- und Optimierungstheorie benutzt.

Hodges und Neuberger [35] haben eine Nutzenfunktion  $U^\epsilon$  betrachtet, ohne sie weiter zu spezifizieren. Danach wurden zwei Optimierungsaufgaben betrachtet. Die erste Aufgabe besteht darin, den Erwartungswert der Nutzenfunktion des Endgewinns zu maximieren, wenn keine Optionen gehandelt wurden

$$v^\epsilon(\alpha_0, \beta_0, S, t) := \sup_{\text{Handelsstrategien}} E\{U^\epsilon(\beta_T + \alpha_T S_T)\}, \quad (2.19)$$

wobei  $S_t$  ein Aktienkurs mit einem Anfangswert  $S_0$  ist. Das Paar  $(\alpha_0, \beta_0)$  ist der Anfangswert einer Handelsstrategie  $(\alpha_t, \beta_t)$ . In der zweiten Aufgabe wird das gleiche Optimierungsproblem unter der Voraussetzung, dass  $N$  europäische Optionen verkauft wurden, gestellt

$$v^{\epsilon, N}(\alpha_0, \beta_0, S, t) := \sup_{\text{Handelsstrategien}} E\{U^\epsilon(\beta_T + \alpha_T S_T - N(S_T - K)^+)\}, \quad (2.20)$$

wobei der Index  $N$  bezeichnet, dass diese Optimierungsaufgabe für  $N$  gehandelte Optionen gilt. Wie Hodges und Neuberger gezeigt haben, läßt sich der Preis einer einzelnen Option  $C^\epsilon$  als die betragsmäßig maximale Lösung  $C^*$  (in meisten Fällen die eindeutige Lösung) der algebraischen Gleichung

$$v^\epsilon(\alpha_0, \beta_0, S_0, t) = v^{\epsilon, N}(\alpha_0, \beta_0 + NC^*, S_0, t) \quad (2.21)$$

bestimmen.



Barles und Soner haben bei gleichen Voraussetzungen eine spezielle Nutzenfunktion, die exponentielle Nutzenfunktion  $U^\epsilon$

$$U^\epsilon = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\epsilon}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^1, \quad \epsilon = \frac{1}{\gamma N} \quad (2.22)$$

eingeführt. Der Parameter  $\gamma > 0$  heißt ein *Risikoaversionsfaktor*. Die proportionalen Transaktionskosten werden mit  $k_{\{BaSo\}}$  bezeichnet und werden später in Abhängigkeit von  $\epsilon$  dargestellt. Mit Hilfe der asymptotischen Analyse der Gleichung (2.21) haben die Autoren festgestellt, dass der Grenzwertpreis  $C(S_0, t)$ , wenn  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $k_{\{BaSo\}} \rightarrow 0$  gehen, einer nichtlinearen Differentialgleichung genügt. Es gilt

**Theorem 2.2.2** (*Barles & Soner, 1998*). Sei  $k_{\{BaSo\}} = a\sqrt{\epsilon}$ ,  $a > 0$ . Wenn  $\epsilon \rightarrow 0$  geht, so ist der Optionspreis  $C(S_0, t)$  mit der Nutzenfunktion  $U^\epsilon$  (2.22) die eindeutige Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \left( 1 + f \left( e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \right) + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (2.23)$$

mit der Anfangsbedingung  $C(S_0, T) = (S - K)^+$ . Der nichtlineare Volatilitätsfaktor wird aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$f'(\alpha) = \frac{f(\alpha) + 1}{2\sqrt{\alpha f(\alpha)} - \alpha}, \quad \alpha \neq 0, \quad f(0) = 0. \quad (2.24)$$

eindeutig bestimmt.

Es ist zu bemerken, dass die von Avellaneda und Parás in [62] entwickelte Gleichung (2.14) mit einer modifizierten Volatilität (2.15) die Form der Differentialgleichung (2.23) hat, wobei die Funktion  $f(\alpha)$  wie folgt dargestellt ist,

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \text{sign}(\alpha), \quad (2.25)$$

ohne dabei der Gleichung (2.24) genügen zu müssen.

Düring, Fournié und Jüngel haben in [20] verschiedene numerische Methoden für die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2.23) untersucht. Das Ziel bestand darin, effektive und präzise numerische Schemata zu entwickeln. Sie haben numerische Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit- und vierter Ordnung in der Raumvariablen betrachtet, sowie deren Vergleich mit klassischen Schemata, wie z.B. explizite, implizite, Crank-Nicolson Methoden u.a., untersucht. Als eine

Test- oder Referenzlösung der nichtlinearen Gleichung (2.23) wurde eine numerische Lösung auf einem sehr feinen Gitter (800 Knoten) betrachtet. Bei der Diskretisierung der Differentialgleichung wurden nichtlineare Koeffizienten auf der vorhergehenden Schicht fixiert, somit war jedes Mal ein lineares System zu lösen. Auf der Grundlage von Kompaktschemata von Rigal [65] haben die Autoren ein neues kompaktes Schema entwickelt. Zahlreiche Tests wurden durchgeführt. Die kompakten Schemata, welche von Rigal entwickelt wurden, sowie das eigene Schema [20] der Autoren, haben eine bessere Genauigkeit, als die untersuchten klassischen Schemata gegeben. Ein weiterer Vorteil diesen Schemata war, dass bei größerer Genauigkeit die CPU-Zeit nur moderat wuchs.

### **2.2.3 Einfluß der Illiquidität von Märkten auf den Preisbildungsprozess**

Eine weitere wichtige Voraussetzung bei der Herleitung der Black-Scholes-Formel war die Annahme, dass ein idealer Markt vorliegt, somit alle Wertpapiere liquide sind. Das bedeutet, dass die Wertpapiere jederzeit in jeder beliebigen Menge gekauft oder verkauft werden können, ohne dass dadurch der Preis der Wertpapiere beeinflusst wird. Die rapide Entwicklung des Aktien- und Optionshandels der großen Banken und von anderen Finanzinstituten hat klar gemacht, dass diese Annahme in der realen Finanzwelt nicht immer erfüllt ist. Die Handelsstrategien der Großhändler können einen starken Einfluß auf die Preisbildung einer Aktie und damit ihre derivativen Wertpapiere ausüben. Eine große Gruppe von Marktteilnehmern, die ein und dieselbe Hedgingstrategie für Portfolios verwendet, kann auch die Stabilität des Finanzsystems beeinflussen. Diese Einflüsse haben im Oktober 1987 zu einer starken Krise auf dem Kapitalmarkt geführt. Seit dieser Zeit haben immer mehr Autoren von verschiedenen Gesichtspunkten aus versucht, diesen neuen Rückkopplungseffekt auf dem Markt zu beschreiben. Der Kapitalmarkt wurde nicht mehr als perfekt liquid und elastisch vorausgesetzt, wobei unter einer Elastizität eine Marktveränderung, die sich bei einer Veränderung einiger oder mehrerer Inputgrößen ergibt, verstanden wird.

Eines der ersten Modelle, das einen Einfluß der Großhändler auf dem Markt berücksichtigt, hat Jarrow in [45], [46] hergeleitet. Er hat als erster die Frage nach Manipulationsmöglichkeiten von Großhändlern in illiquiden Märkten gestellt. Die vorherrschende Meinung zu diesem Zeitpunkt war, dass auf dem Markt keine Preismanipulationen möglich sind, unabhängig davon, ob man es mit einem kleinen Investor oder mit einem Großhändler zu tun hat. Dabei hat man übersehen, dass für Großhändler die Annahme 3 auf Seite 12 nicht immer gilt.

Jarrow hat eine hinreichende Bedingung zur Marktgestalt vorgeschlagen, unter der keine Manipulationsstrategien der Großhändler möglich sind. Der Autor hat in seinem Modell nur eine Voraussetzung der klassischen Theorie geändert,

nämlich die Bedingung der unbeschränkten Liquidität des Marktes. Alle weitere Bedingungen (1, 4, 6, S. 12) sind unverändert geblieben. Jarrow hat sein Modell sehr konsequent und ausführlich begründet. Die wichtigen Voraussetzungen sowie die Bezeichnungen und Terminologie haben eine Grundlage für viele weitere Untersuchungen verschiedener Autoren gelegt.

Jarrow hat ein Modell mit diskreter Zeit betrachtet, wobei er fixierte Zeitpunkte  $\tau = \{0, 1, \dots, T\}$  eingeführt hat. In seinem Modell wird auf dem Markt mit drei Finanzinstrumenten gehandelt. Das erste Aktivum ist eine Aktie. Sie folgt einem stochastischen Prozess  $\{Z_t, t \in \tau\}$ , auf die Aktie wird keine Dividende ausgeschüttet. Zusätzlich ist die Anzahl der Aktien in jedem Zeitpunkt  $t \in \tau$  maximal auf  $N$  begrenzt. Das zweite Aktivum ist ein Geldmarktpapier, üblicherweise Bond genannt. Der Bond folgt einem stochastischen Prozess  $\{B_t, t \in \tau\}$ ,  $B_0 \equiv 1$ . Typischerweise wird der Bond als eine Maßeinheit für die relative Preisbestimmung anderer Finanzinstrumente auf dem Markt genommen. Weiterhin wird immer ein relativer Aktienpreis  $S_t \equiv Z_t/B_t$  betrachtet. Das dritte gehandelte Wertpapier ist ein Derivat mit einer Payoff-Funktion  $d(S_T)$ . Das Derivat folgt einem stochastischen Prozess  $\{D_t, t \in \tau\}$ . Ein relativer Preis des Derivats ist in diesem Fall  $V_t \equiv D_t/B_t$  mit der entsprechenden Payoff-Funktion  $h(S_T) \equiv d(S_T)/B_T$ . Jarrow hat in seiner Arbeit eine europäische Call-Option  $V_t = C_t$  und einen Terminkontrakt betrachtet. Die von ihm eingeführten Bezeichnungen wurden später im allen nachfolgenden Arbeiten übernommen und werden auch im vorliegenden Text benutzt. Wir werden im weiteren den relativen Preis eines Derivats auch dann mit  $V_t$  bezeichnen, wenn es sich nicht um einen speziellen Typ des Derivats handelt.

Jarrow hat zwei Gruppen von Teilnehmern eingeführt. Die erste Gruppe besteht aus Großhändlern. Der Autor hat diese Gruppe auch als Börsenspekulanten bezeichnet. Später werden die Großhändler auch Programmhändler genannt, insbesondere, wenn es um eine spezielle Hedgingstrategie geht. Die zweite Gruppe hat der Autor als Preisnehmer definiert. Ein typischer Vertreter dieser Gruppe ist ein kleiner Anleger, der nicht in der Lage ist, mit seinem eigenen Handeln auf einen Aktienpreis einzuwirken. In weiteren Arbeiten werden die Preisnehmer typischerweise als Referenzhändler bezeichnet.

Jarrow hat eine Handelsstrategie der Großhändler als einen dreidimensionalen stochastischen Prozess  $\{(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t), t \in \tau\}$  beschrieben. Die Werte  $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$  definieren die Anzahl von Aktien, bzw. Bonds, bzw. Derivaten, welche die Großhändler in ihrem Portfolio zum Zeitpunkt  $t$  haben. Am Anfangspunkt haben die Großhändler keine Wertpapiere im Portfolio, d.h.  $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ . Die Handelsstrategie wird selbstfinanzierend vorausgesetzt, d.h.

$$\beta_{t-1} + \alpha_{t-1}S_t + \gamma_{t-1}C_t = \beta_t + \alpha_tS_t + \gamma_tC_t, \quad \forall t \in \tau.$$

Weiterhin hat Jarrow sehr detailliert die Wirkung des Großhändlers beschrieben, wobei er eine Reihe von Mechanismen auf dem Markt formalisiert und somit

der mathematischen Untersuchung zugänglich gemacht hat. Folgende Annahmen hat der Autor formuliert.

A.1. *Der relative Preisbildungsprozess*

Diese Annahme definiert eine *Reaktionsfunktion* des Marktes auf eine Handelsstrategie. Es wird behauptet, dass für eine beliebige Handelsstrategie der Großhändler  $(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$  ein Preisprozess  $S_t$  definiert ist. Dabei existiert immer eine Folge von Funktionen  $\{\psi_t\}_{t \in \tau}$ , so dass  $S_t = \psi_t(\alpha^t; \gamma^t)$ , wobei  $\alpha^t := (\alpha_t, \alpha_{t-1}, \dots, \alpha_0)$  und  $\gamma^t := (\gamma_t, \gamma_{t-1}, \dots, \gamma_0)$  sind. Der Autor hat betont, dass diese Reaktionsfunktion  $\psi_t$  nur von der Anzahl der Aktien und Derivate im Portfolio des Großhändlers abhängt.

A.2. *Die Börsenspekulanten sind "groß"*

Diese Annahme bedeutet, dass wenn ein Großhändler eine große Anzahl von Aktien kauft, der relative Preis dieser Aktien steigt. In ähnlicher Weise, wenn ein Großhändler seine Aktien verkauft, fällt der Aktienkurs. Diese Bedingung wird in der folgenden Ungleichung auf die Reaktionsfunktion zusammengefasst. Ist  $\alpha_t > \alpha_{t-1}$ ,  $t \in \tau$ , so folgt  $\psi_t(\alpha_t, \alpha_{t-1}, \dots, \alpha_0; 0) > \psi_t(\alpha_{t-1}, \alpha_{t-1}, \dots, \alpha_0; 0)$ . Wenn  $\alpha_t < \alpha_{t-1}$ ,  $t \in \tau$ , so gilt  $\psi_t(\alpha_t, \alpha_{t-1}, \dots, \alpha_0; 0) < \psi_t(\alpha_{t-1}, \alpha_{t-1}, \dots, \alpha_0; 0)$ .

A.3. *Die Arbitragefreiheit des Marktes für alle Teilnehmer*

Jarrow hat die Voraussetzung der Arbitragefreiheit der klassischen Preistheorie in folgender Weise auf illiquide Märkte verallgemeinert. Wenn der entsprechende Informationsfluß über die Marktlage in gleichem Maße den Großhändlern und allen anderen Teilnehmern zugänglich ist und zusätzlich die Position in den Aktien der Großhändler im Zeitraum  $[t, t+1]$  konstant bleibt, so existiert keine Arbitragemöglichkeit auf dem Gesamtmarkt.

A.4. *Die Unabhängigkeit des Preisprozesses  $S_t$  von der Portfoliogeschichte des Großhändlers*

Für zwei beliebige Handelsstrategien  $(\alpha_t, \beta_t, 0)$  und  $(\hat{\alpha}_t, \hat{\beta}_t, 0)$ ,  $\forall t \in \tau$ , mit  $\alpha_t = \hat{\alpha}_t$  gilt  $\psi_t(\alpha^t; 0) = \psi_t(\hat{\alpha}^t; 0)$ . Daraus folgt, dass wenn die Großhändler nur mit Aktien und Bonds handeln, dann existieren keine Manipulationsmöglichkeiten auf dem Markt.

A.5. *Die Eindeutigkeit der Preisbildung für ein Derivat*

Diese Annahme ist ähnlich zur Annahme der Vollständigkeit des Marktes in der klassischen Optionspreistheorie. Es wird behauptet, dass eindeutige

nichtnegative Funktionen  $n_t, m_t$  existieren, so dass für eine gegebene Strategie  $(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$  mit  $\alpha_t + n_t \gamma_t \leq N$

$$C_t = n_t(\alpha^t, \gamma^t)S_t - m_t(\alpha^t, \gamma^t) \quad (2.26)$$

$$n_{t-1}S_t - m_{t-1} = n_tS_t - m_t \quad (2.27)$$

$$C_T = h(S_T)$$

gilt. Das System (2.26)-(2.27) definiert eine eindeutige selbstfinanzierende Handelsstrategie  $(n_t, m_t)$ , die ein Derivat  $C_t$  dupliziert. Aus der Gleichung (2.26) folgt, dass der Derivatpreis von der Handelsstrategie des Großhändlers abhängt.

#### A.6. Märktesynchronisierung

Wenn alle Annahmen A.1-A.5 erfüllt sind und für eine beliebige Handelsstrategie  $(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$  die Bedingungen

$$\psi_t(\bar{\alpha}_t, 0) = \psi_t(\alpha^t, \gamma^t), \quad \bar{\alpha}_t := \alpha_t + \gamma_t n_t(\alpha_t, \gamma_t)$$

erfüllt sind, so sind die Märkte von Aktien, Bonds und Derivaten synchronisiert. Jarrow hat bewiesen, dass Manipulationsstrategien des Großhändlers ausgeschlossen sind, wenn die drei Märkte synchronisiert sind.

Der Autor hat Beispiele einer Replikationsstrategie für eine europäische Call-Option und für einen Terminkontrakt betrachtet. Für die Berechnungen hat er das Binomialmodell mit zwei Perioden untersucht. In dem Fall, wo die Märkte synchronisiert sind, ist keine Manipulationsmöglichkeit gegeben und das Binomialmodell bleibt funktionell, auch wenn sich die Marktvolatilität ändert.

Die neuste Forschung des illiquiden Marktes wurde später im Großen und Ganzen in zwei Richtungen weiterentwickelt. Zunächst wurde begonnen, den Einfluß einer Handelsstrategie des Großhändlers unmittelbar auf den Preisbildungsprozess zu untersuchen. Das bedeutet unter anderem, die Frage zu beantworten, wie sich die Volatilität  $\sigma(S, t)$  und die Drift  $\mu(S, t)$  in einem Preisprozess

$$dS_t = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dW_t \quad (2.28)$$

unter einem Rückkopplungseffekt ändern. Die Preisentwicklung wird aus einer Gleichgewichtsgleichung

$$\mathcal{G}(t, Y_t, S_t) \equiv \mathcal{S}(t, Y_t, S_t) \quad (2.29)$$

bestimmt, wobei  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{S}$  die gesamte Nachfrage- bzw. eine gesamte Angebotsfunktion des Marktes sind. Die äquivalente Form von (2.29) ist

$$G(t, Y_t, S_t) \equiv 1, \quad (2.30)$$

wobei  $G := \mathcal{G}/\mathcal{S}$  ist. Die Funktion  $G$  sowie ein Prozess  $Y_t$  werden bei verschiedenen Autoren unterschiedlich spezifiziert.

Eine andere Richtung bei der Untersuchung des illiquiden Marktes ist im Prinzip aus ersterer entstanden und umfasst die Untersuchungen einer Replikationsstrategie des Großhändlers in illiquiden Märkten. Eine der neusten Ideen in diesem Gebiet wurde von Frey [26] vorgeschlagen und besteht darin, den Einfluß einer Handelsstrategie im ersten Schritt der Beschreibung des Preisprozesses  $S_t$  in Betracht zu ziehen

$$dS_t = \mu S dt + \sigma S dW_t + d\alpha_t.$$

Der Preis  $S_t$  wird danach in der Form (2.28) mit modifizierter Volatilität und modifiziertem Drift wiedergegeben. Eine Funktion  $\alpha_t$  genügt dabei einer nichtlinearen Differentialgleichung.

Eine Handelsstrategie der Großhändler wurde in allen Untersuchungen als

$$\alpha_t = \rho \phi_t$$

vorausgesetzt, wobei die Konstante  $0 < \rho < 1$  den Anteil des Großhändlers auf dem Markt darstellt. So wurde durch den Parameter  $\rho$  die Abhängigkeit des Rückkopplungseffektes davon, wie groß die Gruppe der Programmhändler ist, berücksichtigt.

Wir werden in diesem Abschnitt die Arbeiten vorstellen, in denen die Ideen dieser beiden Forschungsrichtungen ausgearbeitet wurden.

Brennan und Schwartz haben in [11] die Wirkung einer simultanen gleichgelagerten Handelsstrategie auf den Aktienkurs und auf die Volatilität analysiert. Diese Arbeit wurde vor dem Artikel von Jarrow veröffentlicht und hat deswegen Bezeichnungen und Methoden, die sich von denen in [45] unterscheiden. Diese Arbeit ist dennoch interessant, weil die Ergebnisse dieser Arbeit als Ausgangspunkt zu vielen weiteren Untersuchungen genommen wurden.

Die Autoren haben den ganzen Markt als ein Portfolio betrachtet. Der erwartete Wert  $y_t$  von diesem Marktportfolio ist analog zu einem Aktienkurs  $S_t$  in der klassischen Theorie und wird entsprechend durch eine geometrische Brownsche Bewegung definiert

$$\frac{dy_t}{y_t} = \eta dW_t$$

wobei  $\eta$  eine Konstante und  $dW_t$  ein Wienercher Prozess ist. Die Volatilität des Marktes  $\sigma(y_t, t)$  wird als eine Funktion von  $y$  und der Zeit  $t$  vorausgesetzt.

Brennan und Schwartz haben die Händler auf dem Markt in zwei Gruppen aufgeteilt. In der ersten Gruppe sind Fondsverwalter (entspricht der Gruppe des Großhändler in [46]) zusammengefaßt, die nur am Hedging des verwalteten Portfolios interessiert sind und völlig automatisch eine und derselben Hedgingstrategie folgen. Ihr Endgewinn ist eine konvexe Payoff-Funktion  $\mathbf{g}(\mathcal{W})$ . Sowohl die Funktion  $\mathbf{g}(\mathcal{W})$  als auch die Hedgingstrategie von den repräsentativen Fondsverwaltern

ist allen Teilnehmern am Markt bekannt. Die zweite Gruppe besteht aus repräsentativen Investoren. Diese Gruppe entspricht im weiteren Sinne der Gruppe der Referenzhändler. Das Ziel der Investoren ist es, den Erwartungswert ihrer Nutzenfunktion  $U$  zu maximieren. Die Variable  $\mathcal{W}$  ist der Gewinn am Ende der betrachteten Periode  $0 \leq t \leq 1$ . Die Investoren können ihre Position wechseln und in die Gruppe der Fondsverwalter übergehen. Somit bezeichnen Brennan und Schwartz den repräsentativen Fondsverwalter als besonders risikoscheuen Anleger auf dem Markt. Der Hauptgewinn der repräsentativen Investoren ist die Differenz zwischen Hauptgewinn auf dem Markt  $\mathcal{W}$  und bekannter Payoff-Funktion der Fondsverwalter

$$\mathcal{W}_I = \mathcal{W} - \mathbf{g}(\mathcal{W}).$$

Die Autoren haben gezeigt, dass die Gesamtvolatilität des Marktes wie folgt berechnet werden kann

$$\sigma(y, t) = \frac{y}{p_M} \frac{\partial p_M}{\partial y} \eta. \quad (2.31)$$

Die Variable  $p_M$  ist der Preis des gesamten Marktportfolios und hängt von der Funktion  $\mathbf{g}(\mathcal{W})$  und der Nutzenfunktion  $U$  ab.

Zuerst haben Brennan und Schwartz einen Markt betrachtet, der nur eine Gruppe von Investoren enthält. Dabei haben sie vorausgesetzt, dass die Nutzenfunktion  $U$  der Investoren folgende Form annimmt

$$U(\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_I) = \frac{1}{1 - \gamma} (\mathcal{W}_0^{1-\gamma} + \rho \mathcal{W}_I^{1-\gamma}),$$

wobei die Variable  $\mathcal{W}_0$  der Größe des Marktes am Anfang der Periode  $0 \leq t \leq 1$  entspricht. Der Parameter  $\gamma \geq 0$  ist wie auch im (2.22) ein Risikoaversionsfaktor.

Unter diesen Voraussetzungen haben die Autoren den Wert des Marktportfolios  $p_M$  und die Volatilität des Marktes  $\sigma$  berechnet

$$\begin{aligned} p_M(y, t) &= y e^{-\gamma \eta^2 (1-t)}, \\ \sigma &= \eta. \end{aligned}$$

Obwohl der Marktpreis vom Risikoaversionsfaktor  $\gamma$  abhängt, bleibt die Volatilität davon unbeeinflusst und ist eine Konstante.

Im zweiten Fall haben Brennan und Schwartz beide Gruppen, Fondsverwalter sowie Investoren, betrachtet. Dabei haben sie angenommen, dass die Gruppe der Fondsverwalter einen Anteil von 1% bis 20% des gesamten Volumens des Marktes annimmt. Die Autoren haben in diesem Fall die Volatilität mit zwei Methoden berechnet. Die erste Methode benutzte die Formel (2.31). Die nach dieser Formel berechnete Volatilität  $\sigma$  war größer als im ersten Fall. Die Differenz zwischen beiden Fällen lag um 1% bis 12% in Abhängigkeit von der Größe der Gruppen und von dem Risikoaversionsfaktor  $\gamma$ .

Die zweite Methode basierte auf der Berechnung einer impliziten Volatilität, wie es in der Black-Scholes-Theorie üblich ist. Die Marktvolatilität  $\sigma$  wächst in diesem Fall im Vergleich zur ersten Portfolioart ohne Portfoliohedging um maximal 7%. Die Autoren haben somit den Einfluß des Portfoliohedgings auf die Marktvolatilität als moderat angenommen.

In der Arbeit [28] wurde von Frey und Stremme die Analyse der Frage, wie die Marktnachfrage, welche durch eine Hedgingstrategie erzeugt wird, einen Gleichgewichtspreis entsprechender Aktien beeinflusst, fortgesetzt. Frey und Stremme haben dabei sowohl Modelle mit diskreter als auch mit stetiger Zeit betrachtet. Hier werden wir nur auf ein Modell mit stetiger Zeit Bezug nehmen. Dieses Modell wurde als Grenzwert aus dem zeitdiskreten Modell abgeleitet. Die Autoren haben den stochastischen Prozess  $Y_t$  als einen aktuellen Zustand auf dem Markt beschrieben. Die gesamte Nachfragefunktion  $G(t, Y_t, S_t)$  läßt sich als eine Summe von einer Nachfragefunktion  $D(Y_t, S_t)$  der Referenzhändler und einer Handelsstrategie  $\phi(t, S_t)$  der Programmhändler darstellen

$$G = D + \rho \phi. \quad (2.32)$$

Mit zusätzlichen Voraussetzungen über die Prozesse  $Y_t, S_t$  und die Funktionen  $D, \phi$  haben Frey und Stremme eine explizite Formel für eine Änderung der Volatilität unter der Einwirkung einer Hedgingstrategie der Programmhändler hergeleitet. Wir stellen diese Formel für einen speziellen Fall dar, welcher in diesem Artikel betrachtet wurde.

Es wird vorausgesetzt:

- (i) Der Risikoaversionsfaktor  $\gamma > 0$  ist konstant.
- (ii) Der stochastischen Prozess  $Y_t$  ist eine Brownsche Bewegung mit einem konstanten Drift  $\mu$  und einer konstanten Volatilität  $\eta$ .
- (iii) Die Händler erwarten, dass der Preis sich nach dem Gesetz  $\tilde{S}_{t_1} = s \cdot \xi_{t_0}$  bei  $t_1 > t_0$  entwickeln wird, mit einer Zufallsvariable  $\xi_t$  und  $s$  einem momentanen Aktienpreis.
- (iv) Der aktuelle Marktwert  $Y_t$  wird nach der Formel  $Y_{t_1} = Y_{t_0} \cdot \zeta_{t_0}$  bei  $t_1 > t_0$  bestimmt, wobei  $\zeta_t$  eine Zufallsvariable ist.

Unter den Annahmen (i)-(iv) gilt folgender Satz

**Theorem 2.2.3** (Frey & Stremme, 1997) *Die Nachfragefunktion  $G$  hat die Form*

$$G(t, Y_t, S_t) = D_* \frac{Y_t}{S_t} + \rho \phi(t, S_t), \quad D_* := D(1, 1)$$



und der Gleichgewichtspreisprozess  $S_t$ , welcher nach der Gleichung (2.30) bestimmt ist, hat die Volatilität

$$v(t, S_t) \eta := \frac{1 - \rho\phi(t, S_t)}{1 - \rho\phi(t, S_t) - \rho S_t \frac{\partial \phi}{\partial S}(t, S_t)} \eta.$$

Wenn  $\rho = 0$  gilt, d.h. wenn nur Referenzhändler auf dem Markt vorhanden sind, so wird  $v(t, S_t) \equiv 1$  und die Marktvolatilität wird mit der Volatilität  $\eta$  des Zustandsprozesses  $Y_t$  übereinstimmen. Das bedeutet, dass der aktuelle Marktpreis einem Gleichgewichtspreis entsprechen wird.

Die Autoren haben ihre Ergebnisse mit denen von Brennan und Schwartz [11] verglichen. Im Modell von Frey und Stremme ist die Differenz zwischen der Volatilitäten am Markt mit und ohne Programmhändler größer als diese Differenz bei Brennan und Schwartz und sie liegt zwischen 1% und 18% bei sonst gleichen Bedingungen. Somit wurde die Hypothese bestätigt, dass die Hedgingstrategien einen wesentlichen Einfluß auf die Marktvolatilität ausüben.

Frey und Stremme haben als Erste in ihrer Arbeit [28] eine Heterogenität in der Verteilung des Portfolios betrachtet, auf die eine Hedgingstrategie angewandt wird. Sie haben diese Heterogenität als einen wichtigen Grund für die Änderung der Marktvolatilität bezeichnet. Die Autoren haben gezeigt, dass je größer der Anteil gleichartiger Kontrakte in einem Portfolio ist, desto stärker sind Schwankungen der Marktvolatilität.

Einen weiteren wichtigen Schritt bei der Untersuchung eines illiquiden Marktes haben Schönbucher und Wilmott [71] gemacht. Der zentrale Punkt ihrer Arbeit war außer einen Mechanismus der Preisbildung zu finden, auch die Untersuchung der Manipulationsmöglichkeiten für Großhändler. Schönbucher und Wilmott haben angenommen, dass der Aktienkurs  $S_t$  dem allgemeinen stochastischen Prozess (2.28) folgt. Die Funktionen  $\mu$ ,  $\sigma$  sind aus dem Marktmodell zu bestimmen. Die Autoren haben folgende Funktion eingeführt

$$\mathcal{X}(t, W_t, S_t) = \mathcal{D}(t, W_t, S_t) - \mathcal{S}(t, W_t, S_t),$$

wobei  $\mathcal{D}(t, W_t, S_t)$  eine Nachfragefunktion der Gruppe der Referenzhändler und  $\mathcal{S}(t, W_t, S_t)$  die gesamte Angebotsfunktion des Marktes sind. Ein stochastischer Prozess  $Y_t$  ist in diesem Fall eine standardisierte Brownsche Bewegung. Eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Funktion  $\mathcal{X}(t, W_t, S_t)$  in diesem Modell ist die Negativität der Ableitung dieser Funktion bezüglich der Änderung des Aktienpreises

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathcal{X}(t, W_t, S_t) < 0. \quad (2.33)$$

Die ökonomische Bedeutung der Formel (2.33) entspricht der Tatsache, dass die Referenzhändler normalerweise mehr Aktien mit einem niedrigen Preis im Portfolio

bevorzugen. Der Gleichgewichtspreis  $S_t$  wurde aus der Gleichung

$$\mathcal{X}(t, W_t, S_t) + \phi(S_t, t) = 0, \quad (2.34)$$

bestimmt, die die Form (2.29) hat, wenn wir berücksichtigen, dass  $\mathcal{G} - \mathcal{S} = \mathcal{D} - \mathcal{S} + \phi(S_t, t) = 0$  gilt. Anstatt die Gleichung (2.34) direkt zu lösen, haben Schönbucher und Wilmott vorgeschlagen einen solchen stochastischen Prozess für  $S_t$  herzuleiten, welcher implizit der Gleichung (2.34) genügt. Der Prozess wurde in der Form (2.28) gesucht. Mit Hilfe des Itô-Lemmas [44] und weiterer klassischer Marktannahmen ist es den Autoren gelungen, eine explizite Form der Funktionen  $\sigma(S_t, t)$  und  $\mu(S_t, t)$  in Abhängigkeit von der Strategien der Groß- und Referenzhändler zu bestimmen. Die Funktion  $\sigma$  hat die Form

$$\sigma(S_t, t) = - \frac{\frac{\partial}{\partial W} \mathcal{X}(t, W_t, S_t)}{\frac{\partial}{\partial S} \mathcal{X}(t, W_t, S_t) + \frac{\partial}{\partial S} \phi(S_t, t)}. \quad (2.35)$$

Die Funktion  $\mu$  hat eine komplizierte Gestalt und ist explizit in [71, S.9] dargestellt.

Die gefundenen Funktionen  $\sigma$ ,  $\mu$ , und somit den Prozess  $S_t$  (2.28), haben die Autoren im weiteren verwendet um eine Differentialgleichung für eine Replikationsstrategie eines Portfolios

$$P(S_t, t) = \phi S_t + \beta_t B_t \quad (2.36)$$

zu entwickeln. Damit ein Wert  $h(S)$  mit dem Prozess  $P(S_T, t)$  im Zeitpunkt  $T$  repliziert wird, muß die folgende von den Autoren hergeleitete Differentialgleichung für  $P(S_t, t)$  gelten

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + r \left( S \frac{\partial P}{\partial S} - P \right) = 0, \quad P(S_T, T) = h(S_T), \quad (2.37)$$

wobei  $\sigma(S_t, t)$  aus (2.35) zu berechnen ist und  $\phi(S, t) = \partial P / \partial S$  ist.

Schönbucher und Wilmott haben betont, dass  $P(S, t)$  keinen Optionpreis mit einer Payoff-Funktion  $h(S)$  darstellt. Wie sie erklärt haben, haben die Großhändler in den illiquiden Märkten die Möglichkeit, mit ihrer Strategie den Preis nach eigenem Bedarf zu manipulieren und somit können in solchen Märkten keine Optionen im üblichen Sinne existieren. Die Funktionen  $h(S)$  und  $P(S, t)$  entsprechen den Buchwerten und nicht den realen Marktwerten.

Die Autoren haben ein Beispiel betrachtet. Sei  $S'$  ein lognormaler Preisprozess mit einer konstanten Volatilität  $\tilde{\sigma}$  und einer konstanten Drift  $\tilde{\mu}$ . Dieser Prozess wird sich unter den Einfluß des Großhändlers modifizieren und wird der Formel (2.28) genügen mit einer Volatilität

$$\sigma(S, t) = \frac{\tilde{\sigma} S'}{1 - \rho \frac{\partial}{\partial S} \phi},$$

welche nach (2.35) mit einer entsprechenden Auswahl der Funktion  $\mathcal{X}$  zu berechnen ist. In dieser Formel ist  $\rho$  ein dimensionsloser Parameter, welcher einem Einfluß der Handelsstrategie des Großhändlers  $\phi$  auf dem Markt entspricht.

Sircar und Papanicolaou haben in ihrer Arbeit [61] die Untersuchungen von Frey und Stremme sowie Schönbucher und Wilmott fortgesetzt. Im Wesentlichen sind die Autoren dem stetigen Modell von Frey und Stremme [28] gefolgt. Ein wichtiger Unterschied liegt in der Definition einer Hedgingstrategie der Programmhändler.

Sircar und Papanicolaou haben angenommen, dass die Programmhändler ihre Hedgingstrategie für die Gesamtmenge  $\zeta$  von gleichartigen Derivaten durchführen. Somit kann ihre Nachfragefunktion als  $\zeta\phi(S_t, t)$  dargestellt werden, wobei die Funktion  $\phi$  einer Hedgingstrategie eines einzelnen Wertpapiers entspricht. Die Autoren haben eine Nachfragefunktion der Referenzhändler in der Relation zum gesamten Angebot des Marktes  $\mathcal{S}$  betrachtet,

$$\mathcal{D} = \mathcal{S}D.$$

Somit wurde die Gesamtnachfragefunktion aller Marktteilnehmer wie folgt dargestellt

$$G(t, Y_t, S_t) = D(t, Y_t, S_t) + \rho\phi(S_t, t), \quad (2.38)$$

wobei  $\rho = \zeta/\mathcal{S}$  dem Anteil des Großhändlers auf dem Markt entspricht. Der Gleichgewichtsprozess  $S_t$  wurde durch die Gleichung (2.30) definiert. Unter der weiterhin geltenden Voraussetzungen der klassischen Black-Scholes-Theorie haben die Autoren eine nichtlineare Gleichung für die Optionspreisbewertung entwickelt,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\eta^2 \left( \frac{D_Y}{D_S + \rho C_{SS}} \right)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r \left( S \frac{\partial C}{\partial S} - C \right) = 0. \quad (2.39)$$

Die Variablen  $S$  und  $Y$  bezeichnen die Abhängigkeit der Funktion  $D$  von einem stochastischen Prozess  $S_t$  und von einem stochastischen Prozess  $Y_t$ , welcher in dieser Arbeit die Gesamteinkünfte der Referenzhändler modelliert,

$$Y_t = \mu(Y_t, t)dt + \eta(Y_t, t)d\overline{W}_t,$$

wobei  $\overline{W}_t$  die Brownsche Bewegung ist. Wenn  $Y_t$  eine Brownsche Bewegung ist, stimmt die Gleichung (2.39) mit der Gleichung (2.37), welche Schönbucher und Wilmott [71] erhalten haben, überein. In der Gleichung (2.39) tritt ein im voraus nichtdefinierter stochastischer Prozess  $Y_t$  auf. Somit ist die Gleichung (2.39) allgemeiner, als die in [71] betrachtete.

Im weiteren haben Sircar und Papanicolaou gezeigt, dass sich bei einer speziellen Form der Nachfragefunktion  $D$

$$D(t, Y_t, S_t) = U \left( \frac{Y^\gamma}{S} \right), \quad U(z) = \beta z, \quad (2.40)$$

die Gleichung (2.39) auf die klassische Black-Scholes-Gleichung ohne Programmhändler reduziert. Hier ist  $U$  eine beliebige differenzierbare Funktion. Dabei wurden zusätzlich die Bedingungen  $D_S < 0$  und  $D_Y > 0$  gestellt. Die erste Bedingung ist analog zur Bedingung von Schönbucher und Wilmott (2.33). Die zweite Bedingung könnte so interpretiert werden, dass je größer die Gesamteinkünfte vom Referenzhändler sind, desto größer ihre Nachfrage ist. Damit ist die Funktion  $D$  (2.40) eine Verallgemeinerung einer in Theorem 2.2.3 von Frey und Stremme eingeführten Funktion. Mit dieser Funktion  $D$  (2.40) haben Sircar und Papanicolaou eine spezielle Differentialgleichung zur Optionspreisbewertung  $C(S, t)$  mit einem Rückkopplungseffekt entwickelt

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \rho \frac{\partial C}{\partial S}}{1 - \rho \frac{\partial C}{\partial S} - \rho S \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}} \right)^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r \left( S \frac{\partial C}{\partial S} - C \right) = 0. \quad (2.41)$$

Die Autoren haben folgende Anfangsbedingungen gestellt. Der Preis  $C(S, t)$  in der Umgebung des Ausübungstages  $(T - \varepsilon, T)$  soll mit einem Black-Scholes-Preis  $C_{BS}(S, t)$  übereinstimmen. In der Wirklichkeit bedeutet dies, dass die Programmhändler in der Nähe des Ausübungstages auf den Handel verzichten. Die Autoren haben  $\varepsilon > 0$  gewählt, um den Problemen mit der Differenzierbarkeit einer Payoff-Funktion zu entgehen. Somit haben Sircar und Papanicolaou die Gleichung (2.41) mit folgenden Anfangs- und Randbedingungen betrachtet,

$$\begin{aligned} C(S, T - \varepsilon) &= C_{BS}(S, T - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \\ C(0, t) &= 0 \\ \lim_{S \rightarrow \infty} |C(S, t) - (S - Ke^{-r(T-t)})| &= 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.42)$$

wobei  $C(S, t) = C_{BS}(S, t)$  für  $T - \varepsilon \leq t \leq T$  gilt.

In numerischen Experimenten haben die Autoren unter anderem die Änderung der Marktvolatilität unter einer dynamischen Hedgingstrategie der Programmhändler gezeigt. Bei  $\rho = 0.05$  ist  $\sigma$  um 10% bis 18% größer gewesen als in einem liquiden Markt. Diese Werte für die Volatilitätsänderung sind größer als bei ähnlichen Experimenten von Brennan und Schwartz [11] sowie Frey und Stremme [28].

Abschließend betrachten wir zur Frage der Wechselwirkung zwischen einer Hedgingstrategie und einem Preisbildungsprozess  $S_t$  einer Aktie die Arbeit [63] von Platen und Schweizer. Die Autoren haben in diesem Artikel zusätzlich eine neue Erläuterung für den Smile-Effekt bei der impliziten Volatilität vorgeschlagen.

Sie haben den Preis einer Aktie in der Form  $L_t = \log S_t$  dargestellt. Alle Händler auf dem Markt sind in diesem Modell Preisnehmer. In einem stochastischen Prozess  $Y_t$  sind alle Informationen, die auf die Preisbildung einen Einfluß nehmen,

zusammengefasst, außer dem Preis der Aktie  $L_t$  selbst. Der Marktpreis  $L_t$  ist aus einer Gleichgewichtsbedingung

$$G(t, Y_t, L_t) = \text{const}, \quad t \geq 0 \quad (2.43)$$

zu bestimmen. Platen und Schweizer haben folgende Beschränkung in ihrem Modell eingeführt. Sie haben vorausgesetzt, dass kein Handel mit Optionen in ihrem Modell stattfindet. Die Stocknachfrage, welche durch den Handel oder durch das Hedging der Optionen induziert wurde, kann als äußerer Einfluß auf dem Markt betrachtet werden. Die Autoren haben einen solchen exogenen Einfluß auf dem Marktpreis ausgeschlossen.

Platen und Schweizer haben folgende Nachfragefunktion betrachtet,

$$G(t, Y_t, L_t) = Y_t + \mathbf{g}(L_t - L_0) + \xi(t, L_t), \quad \mathbf{g} \neq 0, \quad (2.44)$$

wobei  $Y_t$  eine Brownsche Bewegung mit der Drift  $\mu$  ist,

$$Y_t = \mu t + \eta \overline{W}_t.$$

Die zweite Komponente in der Gleichung (2.44) ist die gesamte Nachfragefunktion von Börsenspekulanten auf dem Markt. Der Parameter  $\mathbf{g}$  beschreibt die Reaktion von Spekulanten auf eine Änderung im Stockpreis. Die Funktion  $\xi(t, L_t)$  bedeutet eine Nachfrage, welche durch eine Hedgingstrategie erzeugt wird. Im weiteren haben die Autoren die Funktion  $\xi$  ausführlich beschrieben. Den Anfangszustand auf dem Markt haben Platen und Schweizer als eine geometrische Brownsche Bewegung angenommen

$$dS_t^{(0)} = S_t^{(0)}(\sigma_0 dW_t + \mu_0 dt). \quad (2.45)$$

Die Programmhändler führen ihre Strategie nach der Black-Scholes-Formel mit konstanter Volatilität  $\sigma_0$  durch. Die Hedgingstrategie einer Call-Option mit der Kontraktgröße  $n$  ist bekannt und bedeutet, dass man eine Menge von  $\xi_{\text{call}}$  Aktien im Portfolio zu enthalten habe,

$$\xi_{\text{call}}(L_\tau; V, K, \tau) = n \Phi \left( \frac{L_\tau - \log K + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \tau}{\sigma_0 \sqrt{\tau}} \right), \quad \tau = T - t, \quad (2.46)$$

wobei  $\Phi(\cdot)$  eine Normalverteilungsfunktion ist. Die Autoren haben vorausgesetzt, dass die Optionen in einem liquiden Markt gehandelt werden. Deswegen kann die Gesamtnachfrage  $\xi$  aus (2.44) als eine Summe aus allen gehandelten Optionen dargestellt werden,

$$\xi(L) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N n_{ij} \Phi \left( \frac{L - \log K_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \tau_i}{\sigma_0 \sqrt{\tau_i}} \right). \quad (2.47)$$

In jedem Zeitpunkt sind auf dem Markt eine Menge aus  $M$  verschiedenen Optionsarten mit den Verfallzeitpunkten  $\tau_i$  vorhanden. Jede Optionsart ist mit der Menge von  $n_{ij}$  verschiedenen Größen und von  $K_{ij}$  verschiedenen Basispreisen zu betrachten. Somit kann man eine Maßfunktion auf einem Raum  $(n, K, \tau)$  definieren. Ein ähnliches Maß haben Frey und Stremme [28] betrachtet, als sie eine Heterogenität der Verteilung des Portfolios eingeführt haben.

Die Hedgingstrategie  $\xi(L)$  (2.47) induziert einen neuen Preis  $S_t^{(1)}$  der Aktie

$$dS_t^{(1)} = S_t^{(1)} \left( \sigma(S_t^{(1)}) dW_t + \mu(S_t^{(1)}) dt \right) \quad (2.48)$$

mit einer Volatilität

$$\sigma(S) = -\frac{\eta}{\gamma + \xi'(\log S)}. \quad (2.49)$$

Die Autoren haben die Theorie eines äquivalenten Martingalmaßes benutzt und den Preis einer Option als einen bedingten Erwartungswert dargestellt

$$u(t, S; K, T) := nE[(S_T - K)^+ | S_t = S] = nE[(S_T - K)^+]. \quad (2.50)$$

Die Nutzung der Martingalthetheorie für die Optionspreisbewertung wurde von Harrison und Pliska [32] vorgeschlagen. Seitdem benutzt man diese Theorie in vielen Betrachtungen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Theorie mit Anwendungen in der Finanzmathematik hat unter anderen Mikosch in [58] dargestellt.

Mit den numerischen Experimenten [63] haben Platen und Schweizer gezeigt, dass die Volatilität  $\sigma(S)$ , welche nach Formel (2.49) berechnet wurde, größer ist als eine konstante Volatilität  $\sigma_0$ , die nach der Black-Scholes-Theorie (2.45) berechnet wurde. Ein wichtiges Ergebnis der Arbeit von Platen und Schweizer [63] war, dass sie einen der möglichen Gründe für den Smile-Effekt aufgedeckt haben. Die Autoren haben gezeigt, dass der neue Prozess  $S_t^{(1)}$  (2.48) mit dem Optionspreis (2.50) für den Smile-Effekt einer impliziten Volatilität als eine Konsequenz von dynamischen Hedgingstrategien verantwortlich ist.

Wir haben schon gezeigt, dass die Aufteilung der Untersuchungen eines illiquiden Marktes in zwei Gebiete sehr unscharf ist. Die nachfolgend beschriebene Arbeit von Frey [25] befindet sich im gewissen Sinne an der Grenze zwischen den Methoden der beiden in diesem Abschnitt betrachteten Richtungen. In bisher betrachteten Arbeiten wurde im allgemeinen untersucht, wie eine Hedgingstrategie eines Großhändlers auf eine Marktvolatilität und auf die Entwicklung des Preises Einfluß nimmt. Frey hat die Frage gestellt, wie sich eine Replikationsstrategie der Großhändler im Fall eines illiquiden Marktes ändert. Als ein Ausgangsmodell hat der Autor das Modell von Jarrow [45], [46] genommen. Jarrow war in seinen Untersuchungen von einem Modell mit diskreter Zeit ausgegangen, d.h. er hat den Binomialfall betrachtet. Im Gegensatz zum Zugang von Jarrow hat Frey einen stetigen Handel in einem kontinuierlich Intervall  $[0, T]$  betrachtet.

Die Marktstruktur wird in diesem Modell ähnlich zu den schon betrachteten Arbeiten angenommen. Der fundamentale Marktprozess  $Y_t$  ist eine Lösung einer stochastischen Gleichung  $dY_t = \eta Y_t dW_t$ , wobei  $W_t$  eine Brownsche Bewegung ist. Der Gleichgewichtspreis  $S_t$  wurde aus der Gleichung (2.38) bestimmt, wobei  $D$ ,  $\rho$ ,  $\phi$  die gleiche Bedeutung wie in der Arbeiten [28], [61] und in den Formeln (2.32), (2.38) haben. Folglich ist  $S_t$  eine Funktion von  $t$ ,  $Y_t$ ,  $\rho\phi$

$$S_t = \psi(t, Y_t, \rho\phi).$$

Die Funktion  $\psi$  ist eine Reaktionsfunktion. Eine Payoff-Funktion  $c(S_t)$  sollte für dieses Modell in der Klasse  $C^3(\mathbb{R}_+)$  liegen. Die Payoff-Funktionen von klassischen Optionen genügen dieser Bedingung nicht, deswegen wurden bei numerischen Tests “idealisierte” Payoff-Funktionen für Optionen genommen. “Idealisierte” Payoff-Funktionen unterscheiden sich nur unwesentlich von einem klassischen Payoff sind aber Funktionen aus der Klasse  $C^3(\mathbb{R}_+)$ .

Frey hat eine Gewinnfunktion  $G_t$  einer Handelsstrategie bis zum Zeitpunkt  $t$  wie folgt definiert,

$$G_t := \int_0^t \rho\phi_\xi d\psi(\xi, Y_\xi, \rho\phi_\xi), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie  $\phi$  kann dann implizit durch die Gleichung

$$P_t = P_0 + G_t \tag{2.51}$$

definiert werden, wobei der Prozess  $P_t$  einem Portfoliowert unter der Ausnutzung dieser Strategie entspricht. Der Prozess  $P_t$  ist analog zu dem Prozess, welcher durch die Formel (2.36) für einen Portfoliowert  $P$  definiert ist. Eine zulässige Strategie  $\phi$  mit dem Prozess  $P_t^c$  repliziert ein Derivat mit einer Payoff-Funktion  $c(S_T)$ , wenn die Strategie selbstfinanzierend ist und außerdem

$$P_T^c = c(\psi(T, Y_T, \rho\phi_T))$$

gilt. Die Werte  $P_t^c$  für  $t < T$  sind in diesem Fall die Hedging-Kosten des Derivats. Frey hat betont, dass in illiquiden Märkten die Hedging-Kosten vom Preis von Derivaten zu unterscheiden sind. In einem perfekt liquiden Markt hätte die Differenz zwischen diesen beiden Preisen zu einem risikofreien Gewinn geführt und somit eine Arbitragemöglichkeit ergeben. In illiquiden Märkten kann diese Differenz wesentlich sein und bildet keinen Widerspruch zum Prinzip der Arbitragefreiheit.

Das Ziel seiner Arbeit war es, eine Replikationsstrategie eines Großhändlers und entsprechende Hedging-Kosten zu untersuchen. Folgende Aufgaben waren zu lösen. Zu finden sei eine solche zulässige Strategie  $\phi$ , welche eine Payoff-Funktion  $c(S_T)$  repliziert und einer impliziten Gleichung

$$c(\psi(T, Y_T, \rho\phi_T)) = P_0 + \int_0^T \rho\phi_\xi d\psi(\xi, Y_\xi, \rho\phi_\xi). \tag{2.52}$$

genügt. Im weiteren hat Frey die Funktion  $c(S_t)$  in der Form  $c(S_t) = \rho h(S_t)$  dargestellt. Der Preis  $S_t = S^\phi(t, Y_t)$  hängt nur von der Zeit  $t$  und dem stochastischen Prozess  $Y_t$  ab, somit nimmt die Gleichung (2.52) nach der Benutzung des Itô-Lemmas [44] die äquivalente Gestalt

$$\begin{aligned} h(S^\phi(T, Y_T)) &= P_0 + \int_0^T \phi(\xi, Y_\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial y} S^\phi(\xi, Y_\xi) dY_\xi + \\ &+ \int_0^T \phi(\xi, Y_\xi) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial y} S^\phi(\xi, Y_\xi) + \frac{1}{2} \eta^2 Y_\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} S^\phi(\xi, Y_\xi) \right) d\xi \end{aligned} \quad (2.53)$$

an. Der Autor hat gezeigt, dass eine Handelsstrategie  $\phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+)$  dann und nur dann eine Lösung einer Hedgingaufgabe (2.53) ist, wenn  $\phi$  eine Lösung der quasilinearen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^2 y^2 \left( 1 + 2\rho \frac{\psi_\alpha}{\psi_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ &+ \frac{\eta^2}{\psi_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( y\psi_y - \psi_t + \frac{y^2}{2} \psi_{yy} \right. \\ &\left. + \rho \frac{\partial \phi}{\partial y} (y^2 \psi_{\alpha y} + y\psi_\alpha) + \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \frac{y^2}{2} \psi_{\alpha\alpha} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

mit Endbedingungen

$$\phi(T, y) = h'(S^\phi(T, y))$$

ist. Nehmen wir an, dass auf dem Markt kein Rückkopplungseffekt vorhanden ist, d.h. dass die Bedingung  $\psi_\alpha \equiv 0$  erfüllt ist und zusätzlich  $\psi(t, Y, 0) = Y$ ,  $\forall t, Y$  gilt. Betrachten wir nun die Funktion  $\partial C / \partial S$ , das sogenannte Hedgeratio oder den Delta-Wert der Option, dann reduziert sich die Gleichung (2.54) auf eine klassische Black-Scholes-Gleichung für die Funktion  $\partial C / \partial S$ . Frey hat die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen für die Differentialgleichung (2.54) bewiesen.

Anhand von numerischen Experimenten hat Frey sein Modell (2.54) mit dem Black-Scholes-Modell verglichen. Er hat als Beispiel ein Hedging einer Call-Option betrachtet. Dabei wurden die Reaktionsfunktion  $\psi(t, Y, \rho\phi)$  als  $\psi(t, Y, \rho\phi) = Y/(1 - \rho\phi)$  angenommen und eine "idealisierte" Payoff-Funktion

$$h(S) = \frac{1}{2} \left( S - K + \sqrt{(S - K)^2 + \alpha} \right), \quad \alpha > 0$$

betrachtet. Er hat gezeigt, dass die qualitativen Eigenschaften von einer Hedgingstrategie, welche aus der Gleichung (2.54) folgen, sehr ähnlich einer klassischen Delta-Strategie sind. Dennoch steigen die Hedging-Kosten mit größeren  $\rho$  Werten bei vergleichbaren anderen Bedingungen.



In dem nachfolgenden Teil werden wir die neusten Modelle, die in den letzten fünf Jahren entwickelt wurden, betrachten. Die Autoren Frey [26], Frey und Patie [27] und später Liu und Hong [54], Bank und Baum [3] haben in ihren Arbeiten einen neuen Zugang zur Betrachtung des Einflusses der Großhändler vorgeschlagen. Sie haben diesen Einfluß als eine exogene Wirkung in der Preisbildung  $S_t$  eingeführt.

Die Arbeit [27] von Frey und Patie ist eine Fortsetzung und eine Verallgemeinerung der Arbeit [26] von Frey. Die wichtigsten Annahmen wurden schon in [26] entwickelt. Wir präsentieren diese beide Arbeiten zusammen und, wo es notwendig ist, werden wir Bezug auf den jeweiligen Artikel nehmen.

Die Programmhändler folgen in diesem Modell einer Handelsstrategie  $\phi_t$ , um ein Derivat mit einer Payoff-Funktion  $h(S_T)$  zu replizieren. Für die Strategie  $\phi_t$  sind folgende Bedingungen vorausgesetzt

(A1)  $\phi_t$  ist eine linksstetige Funktion,  $\phi_t = \lim_{s \rightarrow t-} \phi_s$ . Ein rechtsstetiger Prozess  $\phi^+ = \{\phi_t^+, t > 0\}$  ist ein Semimartingal  $\phi_t^+ = \lim_{s \rightarrow t+} \phi_s$ .

(A2)  $\Delta\phi_t^+ := \phi_t^+ - \phi_t > -1/\bar{\rho}$ , wobei  $\bar{\rho}$  eine positive Konstante ist.

Ein Aktienpreis  $S_t$  ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = \sigma S_{t-} dW_t + \rho \lambda(S_{t-}) S_{t-} d\phi_t^+, \quad (2.55)$$

wobei  $W_t$  eine Brownsche Bewegung ist.  $S_{t-}$  bedeutet einen linksseitigen Grenzwert. Der Parameter  $\rho \geq 0$  beschreibt die Marktliquidität. Sind auf dem Markt keine Großhändler vorhanden, so ist  $\rho = 0$ . Eine stetige Funktion  $\lambda(S)$  wurde von Frey als ein Liquiditätsprofil des Marktes mit Eigenschaften  $\lambda(S_{t=0}) = 1$  und  $\rho \lambda(S) \leq \bar{\rho}$  definiert. Aus der Annahme (A1) und aus Stetigkeitseigenschaften des Prozesses  $S_t$  folgt, dass eine Gewinnfunktion

$$G_t = \int_0^t \phi_s dS_s$$

wohldefiniert ist. Als eine selbstfinanzierende Strategie  $(\phi_t, \beta_t)$  haben Frey und Patie eine solche zulässige Strategie angenommen, die der Gleichung (2.51) genügt. Der Prozess  $P_t$  von der Gestalt

$$P_t := \phi_t S_t + b_t$$

beschreibt einen Portfoliopreis. Frey hat eine Fehlerfunktion eingeführt

$$e_T := h(S_T) - P_T = h(S_T) - \left( P_0 + \int_0^T \phi_s dS_s \right). \quad (2.56)$$

Ein positiver Wert von  $e_T$  bedeutet einen Verlust des Programmhändlers wegen einer Hedgingstrategie und ein negativer Wert bedeutet entsprechend einen Profit. Eine perfekte Replikationsstrategie ist im folgenden Theorem bestimmt.

**Theorem 2.2.4** (Frey, 2000). Sei  $u \in C^{2,1}$  eine Lösung der folgenden nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{u_{SS}}{(1 - \rho \lambda(S) S u_{SS})^2} &= 0, \\ u(S, T) &= h(S_T). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Sei die erste Ableitung  $u_s$  aus der Klasse  $C^{2,1}$  und sei zusätzlich die Bedingung  $\rho \lambda(S) S u_{SS} < 1$  erfüllt. Dann ist eine selbstfinanzierende Strategie  $\phi_t = u_s(S, t)$  und der Prozess  $P_t = u(S, t)$  eine perfekte Replikationsstrategie für ein Derivat mit einer Payoff-Funktion  $h(S_T)$ , d.h. die Fehlerfunktion (2.56) genügt der Gleichung  $e_T = 0$ .

Die Autoren betonen, dass eine Lösung der Gleichung (2.57) die Hedging-Kosten einer Strategie bestimmt. Diese Kosten können nicht mit einem Preis des Derivats zusammenfallen.

Im weiteren haben Frey und Patie im Artikel [27] ein Liquiditätsprofil  $\lambda(S)$  untersucht. Die Autoren haben die Form der Funktion  $\lambda(S)$  gefunden,

$$\lambda(S) = 1 + (S - S_0)^2 (a_1 \mathbf{1}_{\{S \leq S_0\}} + a_2 \mathbf{1}_{\{S_0 < S\}}),$$

welche bei geeigneter Wahl der Konstanten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $\rho$  den entsprechenden Smile-Effekt der impliziten Volatilität einer Aktie gut approximieren kann.

Liu und Yong haben in der Arbeit [54] untersucht, ob in illiquiden Märkten überhaupt eine Hedgingstrategie existiert, welche perfekt eine Option replizieren kann. Die Autoren haben als Beispiel eine Replikation einer europäischen Option betrachtet. Das Modell von Liu und Yong steht in einem engen Zusammenhang mit der Arbeiten von Frey [26], Frey und Patie [27], Bank und Baum [3]. Einen Einfluß von Programmhändlern auf einen Aktienpreis haben Liu und Yong unmittelbar in den stochastischen Prozess der Preisentwicklung  $S_t$  eingeführt

$$dS_t = S_t \mu(t, S_t) dt + S_t \sigma(t, S_t) dW_t + S_t \lambda(t, S_t) d\phi_t. \quad (2.58)$$

Die Funktion  $\lambda(t, S_t) \geq 0$  widerspiegelt den Einfluß der Großhändler auf den Aktienpreis. Die Funktion  $\phi$  bedeutet wie früher eine Strategie der Programmhändler. Zur Bestimmung der Funktion  $\phi$  und des Preises  $S_t$  haben die Autoren ein System von stochastischen Differentialgleichungen gebildet. Im weiteren haben sie bewiesen, dass für spezielle Klassen von  $\lambda(S, t)$  und Funktionen  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $r$ ,  $\delta$ ,  $h$  eine eindeutige Lösung des Systems existiert und folgende Form hat,

$$\phi(t, S_t) = u_S(t, S), \quad (2.59)$$

$$dS_t = S_t \tilde{\mu}(t, S_t) dt + S_t \tilde{\sigma}(t, S_t) dW_t. \quad (2.60)$$

Die Funktionen  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\mu}$  sind die modifizierte Volatilität beziehungsweise erwartete Rendite des Aktienkurses unter dem Einfluß des Programmhändlers. Die Funktion  $u_S$  ist dabei eine eindeutige Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$u_t + \frac{\sigma^2(t, S) S^2 u_{SS}}{2(1 - \lambda(t, S) S u_{SS})^2} + (r(t, s) - \delta(t, S)) S u_S - r(S, t) u = 0, \quad u(T, S) = h(S), \quad (2.61)$$

wobei  $r(t, s)$  ein Zinssatz und  $\delta(t, S)$  ein Dividendenenertrag sind.

Die Autoren haben gezeigt, dass bei der Benutzung einer Replikationsstrategie  $\phi$  (2.59) spezielle Kosten berücksichtigt werden müssen. Um eine Option mit der Payoff-Funktion  $h(S_T)$  zu replizieren, braucht man Anfangskosten  $u^h$ , welche nach der Formel

$$u^h(S_{0-}) := u(0, S_0) - S_0 u_S(0, S_0) + c, \quad \text{mit } c = \int_{S_{0-}}^{S_0} \frac{dS_t}{\lambda(0, S_0)}.$$

definiert werden können. Die Autoren haben betont dass, wenn die Anfangskosten nicht beachtet werden, die Replikationsstrategie  $\phi$  unterbewertet wird.

Bei den numerischen Berechnungen von Hedging-Kosten haben die Autoren für die Funktion  $\lambda(t, S)$

$$\lambda(t, S) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\bar{S}} (1 - e^{-\beta(T-t)}) & \text{if } \underline{S} < S < \bar{S} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.62)$$

die spezielle Form gewählt, wobei  $\alpha > 0$  ein konstanter Einflusskoeffizient und  $\beta$  eine beliebige Konstante ist. Die Werte  $\underline{S}$  und  $\bar{S}$  sind obere und untere Grenzen des Aktienpreises, die durch den Einfluß des Programmhändlers erreicht werden können. Die Autoren haben gezeigt, dass Händler in illiquiden Märkten mehr Aktien kaufen, um eine Call-Option zu replizieren, als im klassischen Black-Scholes-Fall. Die Differenz zwischen den Kosten beim Black-Scholes-Hedging und bei einer Replikationsstrategie  $\phi_t$  der Großhändler ist näherungsweise eine quadratische Funktion bezüglich der Optionenanzahl, die zu replizieren ist. Die Replikationskosten sind wesentlich, sogar bei einem kleinen Einfluß auf den Preis, d.h. wenn  $\gamma \ll 1$  ist.

Eines der neuesten Modelle zur Beschreibung der Illiquidität des Marktes wurde von Frey [26], Frey und Patie [27], Liu und Hong [54] eingeführt. Diese Arbeit war der Untersuchung der Lösungen der Gleichung (2.57) unter speziellen Voraussetzungen gewidmet. In den weiteren Betrachtungen nehmen wir  $\lambda(S) = \text{const}$  an. In den nachfolgenden Kapiteln werden wir zeigen, dass wegen einer vorhandenen Symmetrie der Differentialgleichung (2.57)  $\lambda(S) = 1$  betrachtet werden kann.



## Kapitel 3

# Untersuchung der Symmetrieeigenschaften eines nichtlinearen Modells eines illiquiden Marktes

In diesem Kapitel werden wir die Methoden der Theorie der Lie-Gruppen benutzen, um die Symmetrieeigenschaften des Modells (2.57) zu untersuchen. In der Gleichung (2.57) haben Frey und Patie [27] eine Funktion  $\lambda(S)$  eingeführt, um den Smile-Effekt des betrachteten Derivats zu modellieren. Diese Funktion hängt von dem Marktgeschehen und von einer Payoff-Funktion des Derivats. Frey und Patie [27] haben ein Beispiel einer Call-Option untersucht und gezeigt, dass  $\lambda(S)$  dabei eine glatte Funktion ist, welche ganz flach wächst, wenn der Aktienpreis größer als der Basispreis ist. Solche Funktionen lassen sich auf endlichen Intervallen gut als eine Konstante approximieren. Wir werden diese Eigenschaft nutzen und in der Gleichung (2.57)  $\lambda(S)$  als eine Konstante betrachten.

Deshalb werden wir in unserer Arbeit die Gleichung

$$u_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{u_{SS}}{(1 - \rho S u_{SS})^2} = 0, \quad (3.1)$$

untersuchen, wobei  $\rho$  in dieser Gleichung  $\lambda \rho$  in der Gleichung (2.57) entspricht. Später werden wir zeigen, dass es leicht möglich ist den Einfluß des  $\lambda = \text{const}$  zu verfolgen, obwohl die Gleichung (3.1) keine Ähnlichkeitssymmetrie besitzt. Die gesuchte Funktion  $u(S, t)$  ist im Bereich  $\Omega$

$$\Omega = \{(S, t) \in \mathbb{R}^2 \mid S > 0, \quad t \in [0, T], \quad T > 0\}$$

der Variablen  $S, t$  definiert. Der Parameter  $\rho$  ist positiv,  $\rho > 0$ . Im weiteren Verlauf wollen wir invariante Eigenschaften der Gleichung (3.1) untersuchen.

Wir führen eine Menge von nichtsingulären Transformationen

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \tilde{S}(S, t, u; a), \\ \tilde{t} &= \tilde{t}(S, t, u; a), \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(S, t, u; a),\end{aligned}\tag{3.2}$$

mit einem Parameter  $a \in \mathbb{R}$  ein. Die Transformationen der Art (3.2) mit zusätzlichen Einschränkungen, die wir später einführen werden, bilden eine Lie-Gruppe von Punkttransformationen. Die Anwendung der Methoden der Theorie der Lie-Gruppen auf die nichtlineare Gleichung (3.1) erlaubt uns Familien von exakten Lösungen zu bilden. Diese Lösungen bilden Familien der invarianten Lösungen bezüglich der entsprechenden Lie-Gruppe.

## 3.1 Bestimmung der Lie-Algebra für die Modellgleichung (3.1)

### 3.1.1 Die wichtigsten Definitionen und Bezeichnungen

In diesem Abschnitt geben wir die zugrunde liegenden Definitionen in allgemeiner Form an, die wir im weiteren in unserem speziellen Fall verwenden werden.

**Definition 3.1.1** Sei  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Menge von Transformationen

$$\tilde{x} = g(x; a),\tag{3.3}$$

die für alle  $x$  aus  $\mathbb{D}$  definiert und vom Parameter  $a$  aus  $A \subset \mathbb{R}$  abhängig ist, bildet eine einparametrische Gruppe der Punkttransformationen  $G(A)$  über der Menge  $\mathbb{D}$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

- (i) für jedes  $a \in A$  ist die Transformation (3.3) umkehrbar,
- (ii) wiederholte Anwendung von (3.3) ergibt eine Transformation der gleichen Art, d.h. aus  $\tilde{x} = g(x; a_1)$ ,  $\tilde{\tilde{x}} = g(\tilde{x}; a_2)$  folgt

$$\tilde{\tilde{x}} = g(x; a)$$

mit einer geeigneten Funktion  $a = a(a_1, a_2)$ ;

- (iii) es existiert ein solches Element  $a_0$ , dass gilt

$$g(x; a_0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{D}.$$

Das Element  $a_0$  heißt ein Einheitsselement der Gruppe der Punkttransformationen.

**Bemerkung 3.1.1** Im weiteren werden wir einzelne Komponenten oder einzelne Gruppen von Komponenten einer Transformation  $g$  unterscheiden. Wir werden diese mit einem unteren Index an  $g$  bezeichnen, welcher auf die bestimmte Gruppe bzw. auf die einzelne Komponente hinweisen wird. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} g(y, w; a) &= (g_y(y, w; a), g_w(y, w; a)), \\ &\text{mit } y = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad w = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \\ g(x; a) &= (g_{x_1}(x; a), g_{x_2}(x; a), \dots, g_{x_n}(x; a)), \\ &\text{mit } x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Neue Variablen werden in diesem Fall wie folgt bezeichnet

$$\tilde{y} = g_y(y, w; a), \quad \tilde{w} = g_w(y, w; a).$$

**Definition 3.1.2** Die Gruppe  $G(A)$  ist eine stetige Gruppe der Klasse  $C_k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ), falls die Abbildung  $g : \mathbb{D} \times A \rightarrow \mathbb{D}$  zur Klasse  $C_k(\mathbb{D} \times A)$  gehört.

**Definition 3.1.3** Eine Gruppe der Transformationen ist eine einparametrische Lie-Gruppe von Punkttransformationen, wenn neben den Axiomen (i)-(iii) der Definition (3.1.1) folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (iv)  $a$  ist ein stetiger Parameter, d.h.  $A$  ist ein Intervall auf  $\mathbb{R}$ ,
- (v)  $G(A)$  ist eine stetige Gruppe der Klasse  $C_\infty(\mathbb{D} \times A)$ ,
- (vi)  $a(a_1, a_2)$  ist eine analytische Funktion von  $a_1$  und  $a_2$ .

Für die weiteren Anwendungen spielt es keine Rolle, welches Intervall  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , des Parameters  $a$  gewählt wird. Wir werden ein Intervall, das symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, betrachten. Somit können wir annehmen, dass die Bedingung (iii) der Definition (3.1.1) mit  $a_0 = 0$  erfüllt ist,

$$g(x; 0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{D}.$$

Wir werden die Bezeichnung  $G(A)$  oder einfach  $G$  im weiteren auch für eine Lie-Gruppe von Punkttransformationen verwenden.

**Definition 3.1.4** Sei  $G(A)$  eine Transformationsgruppe, welche für jedes Element  $x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist. Eine Untermenge  $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$ , heißt eine invariante Menge bezüglich dieser Gruppe  $G(A)$ , wenn aus  $x \in \overline{\mathbb{D}}$  und  $g \in G(A)$  folgt  $\tilde{x} = g(x; a) \in \overline{\mathbb{D}}$ , mit  $a \in A$ .

### 3.1.2 Einführung von Jet-Räumen und Definition einer Symmetriegruppe für eine Differentialgleichung

In diesem Abschnitt führen wir den wichtigen Begriff einer Lie-Punkt-Symmetrie einer Differentialgleichung ein. Im weiteren wird einer Differentialgleichung eine Mannigfaltigkeit ihrer Lösungen im entsprechenden Raum zugeordnet, welche wie folgt definiert wird.

Zuerst führen wir einen zweidimensionalen Raum  $X$  der unabhängigen Variablen  $(S, t)$  und einen eindimensionalen Raum  $U$  der abhängigen Variable  $u$  ein. Der Basisraum  $M = X \times U$  ist das kartesische Produkt des Paares  $(S, t) \in X \subset \mathbb{R}^2$  mit  $u \in U \subset \mathbb{R}$ . Die Elemente des Raumes  $M \subset \mathbb{R}^3$  werden wir durch  $(x, u) \in M$  mit  $x = (S, t)$  bezeichnen.

Weiterhin betrachten wir den Raum  $U_{(1)}$  der ersten Ableitungen der Funktion  $u$  nach  $S$  und  $t$

$$U_{(1)} = \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial S}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\}$$

und im allgemeinen Fall den Raum  $U_{(m)}$  aller Ableitungen der Ordnung  $m$

$$U_{(m)} = \left\{ \left( \frac{\partial^m u}{\partial S^m}, \frac{\partial^m u}{\partial S^{m-1} \partial t}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial S^{k_1} \partial t^{k_2}}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right) \right\}$$

mit  $k_1 = m, m-1, \dots, 2, 1, 0$ ;  $k_2 = m - k_1$ . Zusammen mit dem Raum  $M$  führen wir die Räume  $M^{(m)}$  wie folgt ein

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= X \times U \times U_{(1)} \\ M^{(2)} &= X \times U \times U_{(1)} \times U_{(2)} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ M^{(m)} &= X \times U \times U_{(1)} \times \dots \times U_{(m)}. \end{aligned}$$

Ein Raum  $M^{(m)}$  heißt ein *Jet-Raum (Jet-Bundle) der Ordnung  $m$*  über dem Basisraum  $M$ . Es ist zu betonen, dass wir jetzt die Variablen  $\partial u / \partial S, \partial u / \partial t, \dots, \partial^m u / \partial t^m$  als unabhängige Variablen betrachten werden. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Koordinaten im Raum  $M^{(m)}$  mit

$$(x, u, v_1, v_2, v_{11}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{j_1 j_2 \dots j_m}), \quad (3.4)$$

wobei  $j_1, j_2, \dots, j_m$  unabhängig voneinander die Werte 1 und 2 annehmen. Außerdem werden die Koordinaten  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}$  als unabhängig von Permutationen der Indizes  $j_1, j_2, \dots, j_m$  vorausgesetzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir folgende Darstellung der Koordinaten an

$$\begin{aligned} &v_{j_1 \dots j_{k_1} j_{k_1+1} \dots j_m}, \\ &j_1 = j_2 = \dots = j_{k_1} = 1, \quad j_{k_1+1} = j_{k_1+2} = \dots = j_m = 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$



Wir werden auch die verkürzte Bezeichnung  $(x, u^{(m)}) \in M^{(m)}$  mit

$$x := (S, t) \in X, \quad u^{(m)} := (u, v_1, v_2, \dots, v_{j_1 j_2 \dots j_m}) \in U \times U_{(1)} \times \dots \times U_{(m)}.$$

für Koordinaten (3.4) verwenden.

Obwohl die Koordinaten  $v_{j_1 j_2 \dots j_m} \in U_{(m)}$  als unabhängige gewählt sind, existiert im Jet-Raum  $M^{(m)}$  eine Relation zwischen den Koordinaten, die man eine *Kontaktstruktur* nennt.

**Definition 3.1.5** *Sei*

$$(S, t, u, v_1, v_2, v_{11}, v_{12}, v_{22}, \dots, v_{j_1 j_2 \dots j_m}) \in M^{(m)}$$

mit

$$v_{j_1} \in U_{(1)}, v_{j_1 j_2} \in U_{(2)}, \dots, v_{j_1 j_2 \dots j_m} \in U_{(m)},$$

wobei  $v_{j_1 j_2 \dots j_m}$  gemäß (3.5) gewählt sind. Die Menge von Hyperflächen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial S} &= v_1, & \frac{\partial u}{\partial t} &= v_2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} &= v_{11}, & \frac{\partial^2 u}{\partial S \partial t} &= v_{12}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v_{22}, \\ &\dots\dots\dots & & & & \\ \frac{\partial^m u}{\partial S^{k_1} \partial t^{k_2}} &= v_{j_1 j_2 \dots j_m} \end{aligned} \tag{3.6}$$

heißt eine *Kontaktstruktur* auf der Mannigfaltigkeit  $M^{(m)}$ .

Jeder Jet-Raum  $M^{(m)}$  ist eine Mannigfaltigkeit mit der Kontaktstruktur (3.6).

Die zu untersuchende Gleichung (3.1) ist eine Gleichung zweiter Ordnung. Aus diesem Grund brauchen wir keinen Jet-Raum größer als zweiter Ordnung zu betrachten. Wir nehmen im weiteren an, dass  $m = 2$  gilt. Die Variablen im Raum  $M^{(2)}$  sind  $(x, u^{(2)}) \in M^{(2)}$  und wir werden sie wie folgt bezeichnen

$$(S, t, u, u_S, u_t, u_{SS}, u_{St}, u_{tt}) \in M^{(2)},$$

wobei  $u_S = v_1$ ,  $u_t = v_2$ ,  $u_{SS} = v_{11}$ ,  $u_{St} = v_{12}$ ,  $u_{tt} = v_{22}$  sind.

Wir bilden eine einparametrische Lie-Gruppe der Punkttransformationen  $G(A)$  des Raumes  $M$

$$\tilde{x} = g_x(x, u; a), \quad \tilde{u} = g_u(x, u; a), \tag{3.7}$$

wobei ein Element  $g \in G(A)$  durch seine Komponenten  $g := (g_x(x, u; a), g_u(x, u; a))$  zu bestimmen ist. Die Lie-Gruppe  $G(A)$  ist eine Untergruppe der Gruppe der Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit  $M$ , die wir als  $\text{Diff}(M)$  bezeichnen.

Wenn wir folgende Bezeichnung

$$\Delta(x, u^{(2)}) = u_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{u_{ss}}{(1 - \rho S u_{ss})^2} \quad (3.8)$$

eingeführen, so erkennen wir, dass die Differentialgleichung (3.1) einer algebraischen Gleichung

$$\Delta(x, u^{(2)}) = 0, \quad (x, u^{(2)}) \in M^{(2)} \quad (3.9)$$

im Jet-Raum  $M^{(2)}$  äquivalent ist. Es ist vorausgesetzt, dass  $\Delta$  eine glatte Funktion ihrer Argumente ist

$$\Delta : M^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Im geometrischen Sinne definiert die Gleichung (3.9) eine Mannigfaltigkeit im Jet-Raum  $M^{(2)}$

$$L_\Delta = \{(x, u^{(2)}) \in M^{(2)} \mid \Delta(x, u^{(2)}) = 0\} \subset M^{(2)}. \quad (3.10)$$

Man nennt  $L_\Delta$  eine *Lösungsmannigfaltigkeit* der Gleichung (3.9).

Eine Transformation  $g \in G(A)$  auf dem Basisraum  $M$  induziert eine Transformation des erweiterten Raumes  $M^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Wir werden die erweiterte Transformation als  $pr^{(k)}g$  bezeichnen (englisch: “prolong” – erweitern) und entsprechend  $k$ -te *Erweiterung von  $g$*  nennen. Die Transformation  $pr^{(k)}g$  wirkt auf solche Weise auf die Koordinaten  $(x, u^{(k)}) \in M^{(k)}$ , dass die Kontaktstruktur jedes Jet-Raumes  $M^{(k)}$  erhalten bleibt. Das heißt, dass die gleichen Relationen (3.6) zwischen den transformierten Variablen  $(\tilde{x}, \tilde{u}^{(k)})$  wie zwischen den Variablen  $(x, u^{(k)})$  im  $M^{(k)}$  gelten sollen. Die transformierten Ableitungen sind die Ableitungen der transformierten abhängigen bezüglich der transformierten unabhängigen Variablen

$$\tilde{u}_{\tilde{S}} := \partial \tilde{u} / \partial \tilde{S} = \psi^S(S, t, u; a), \quad \tilde{u}_{\tilde{t}} := \partial \tilde{u} / \partial \tilde{t} = \psi^t(S, t, u; a), \quad \text{usw.} \quad (3.11)$$

wobei  $\psi^S$ ,  $\psi^t$ , usw. glatte Funktionen mit der Eigenschaft

$$\psi^S(S, t, u; 0) = u_S, \quad \psi^t(S, t, u; 0) = u_t, \quad \text{usw.} \quad (3.12)$$

sind. Für den speziellen Fall der Gleichung (3.1) wird die zweite Erweiterung  $pr^{(2)}g : M^{(2)} \rightarrow M^{(2)}$  gebraucht. Sie hat folgende Komponenten

$$pr^{(2)}g = (g_x, g_u, \psi^S, \psi^t, \psi^{SS}, \psi^{St}, \psi^{tt}). \quad (3.13)$$

mit

$$\tilde{x} = g_x(S, t, u; a), \quad \tilde{u} = g_u(S, t, u; a), \quad \tilde{u}_{\tilde{S}} = \psi^S(S, t, u; a), \quad \tilde{u}_{\tilde{t}} = \psi^t(S, t, u; a),$$

$$\tilde{u}_{\tilde{S}\tilde{S}} = \psi^{SS}(S, t, u; a), \quad \tilde{u}_{\tilde{S}\tilde{t}} = \psi^{St}(S, t, u; a), \quad \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \psi^{tt}(S, t, u; a)$$

und mit einer Kontaktstruktur

$$\partial\tilde{u}/\partial\tilde{S} = \psi^S(S, t, u; a), \quad \partial\tilde{u}/\partial\tilde{t} = \psi^t(S, t, u; a),$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{S}^2} = \psi^{SS}(S, t, u; a), \quad \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{S}\partial\tilde{t}} = \psi^{St}(S, t, u; a), \quad \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{t}^2} = \psi^{tt}(S, t, u; a).$$

Im weiteren werden wir nur den Jet-Raum  $M^{(2)}$  betrachten: Theoreme, Lemmas und Eigenschaften werden wir für diesen speziellen Fall formulieren, wenn es zum besseren Verständnis führt.

**Lemma 3.1.1 (Haupteigenschaft einer 2-ten Erweiterung von  $g$ )** *Eine 2-te Erweiterung von einer Komposition zweier Transformationen  $g_1$  und  $g_2$  ist äquivalent zur Komposition von zwei 2-ten erweiterten Transformationen  $pr^{(2)}g_1$  und  $pr^{(2)}g_2$*

$$pr^{(2)}(g_1 \circ g_2) = pr^{(2)}g_1 \circ pr^{(2)}g_2. \quad (3.14)$$

Laut Eigenschaft (3.14) induziert die Lie-Gruppe  $G(A)$  der Punkttransformationen des Raumes  $M$  eine Lie-Gruppe  $G^{(2)}(A)$  der Punkttransformationen des Raumes  $M^{(2)}$ . Diese Gruppe ist eine Untergruppe von der Gruppe der Diffeomorphismen des Raumes  $M^{(2)}$   $\text{Diff}(M^{(2)})$ .

Jetzt können wir den Begriff einer Symmetriegruppe einer Differentialgleichung einführen.

**Definition 3.1.6** *Eine Transformation  $g \in G(A) \subset \text{Diff}(M)$*

$$g : (x, u) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{u}) \quad (3.15)$$

*bildet eine Symmetrietransformation oder kurz eine Symmetrie einer Differentialgleichung, wenn das Bild  $\tilde{u}(\tilde{x})$  einer Lösung  $u(x)$  der Differentialgleichung wieder eine Lösung der Gleichung ist.*

Wenn jede Transformation  $g \in G(A)$  eine Symmetrie ist, dann heißt die Gruppe  $G(A)$  eine *Symmetrietransformationsgruppe* oder kurz auch eine *Symmetriegruppe* einer Differentialgleichung.

Für eine Symmetriegruppe  $G(A)$  gilt folgendes Kriterium.

**Theorem 3.1.1** *Sei  $G(A)$  eine Transformationsgruppe des Raumes  $M$ . Wenn  $L_\Delta$  (3.10) eine invariante Mannigfaltigkeit bezüglich der erweiterten Transformationsgruppe  $G^{(2)}(A)$  ist, dann ist  $G(A)$  eine Symmetrie einer entsprechenden Differentialgleichung (3.9).*

Wir bezeichnen eine Symmetriegruppe der Differentialgleichung (3.9) mit  $G_\Delta$

$$G_\Delta = \{pr^{(2)}g \in G^{(2)}(A) \mid pr^{(2)}g : L_\Delta \rightarrow L_\Delta\}. \quad (3.16)$$

### 3.1.3 Aufbau der Lie-Algebra und Untersuchung ihrer Eigenschaften für die Gleichung (3.1)

In der Arbeit [53] hat Sophus Lie die Grundsätze der Theorie der Lie-Gruppen entwickelt. Er hat jeder Lie-Gruppe ein Vektorfeld zugeordnet, welches unter bestimmten Bedingungen eine Algebra bildet. Diese Algebra enthält alle Informationen über die entsprechende Lie-Transformationsgruppe und wird *Lie-Algebra* genannt. In der Praxis stellt es sich als leichter heraus, zunächst eine Lie-Algebra der Differentialgleichung zu bestimmen und dann, falls es möglich ist, explizit die entsprechende Lie-Gruppe zu berechnen.

In diesem Abschnitt werden wir den Aufbau und die Eigenschaften einer Lie-Algebra der Symmetriegruppe  $G_\Delta$  unserer Differentialgleichung (3.1) beschreiben.

Für jeden fixierten Punkt  $(x_0, u_0) \in M$  stellt eine Transformation (3.7) eine glatte Kurve im Raum  $M$  dar, die durch den Punkt  $(x_0, u_0)$  verläuft. Diese Menge, die als  $g^A$  bezeichnet wird, ist eine einparametrische Mannigfaltigkeit und kann durch die parametrischen Gleichungen

$$g^A := (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = (g_x(x_0, u_0; a), g_u(x_0, u_0; a)), \quad a \in A$$

definiert werden. Der Parameter  $a$  durchläuft das ganze Intervall  $A$ . In dem Fall, den wir betrachten, ist  $g^A$  eine glatte Kurve, die *Orbit des Punktes*  $(x_0, u_0)$  heißt.

Der Vektor

$$\theta_{(x_0, u_0)} = \frac{\partial}{\partial a} g^A \Big|_{a=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a} g_x \\ \frac{\partial}{\partial a} g_u \end{pmatrix} \Big|_{a=0} \quad (3.17)$$

ist eine Tangente zum Orbit  $g^A$  im Punkt  $(x_0, u_0)$ .

Durch jeden Punkt  $(x, u) \in M$  verläuft ein Orbit und wir können nach der Formel (3.17) zu dem Punkt  $(x, u) \in M$  einen Tangentenvektor  $\theta_{(x, u)}$  bestimmen. Wir erhalten folglich ein Vektorfeld über  $M$ . Wir erinnern an die Bezeichnung  $x = (S, t)$  und schreiben zusätzlich die Transformation (3.7) in der Variablen  $S, t, u$  ausführlich aus

$$\tilde{S} = g_S(S, t, u; a), \quad \tilde{t} = g_t(S, t, u; a), \quad \tilde{u} = g_u(S, t, u; a). \quad (3.18)$$

**Definition 3.1.7** Ein Vektorfeld  $\Theta = \{\theta_{(S, t, u)} \mid (S, t, u) \in M\}$ , das durch die Formel

$$\theta_{(S, t, u)} = \frac{\partial}{\partial a} g^A \Big|_{a=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a} g_S \\ \frac{\partial}{\partial a} g_t \\ \frac{\partial}{\partial a} g_u \end{pmatrix} \Big|_{a=0}, \quad \forall (S, t, u) \in M \quad (3.19)$$

definiert ist, heißt ein *tangentiales Vektorfeld* der Gruppe  $G_\Delta$ .

Die Komponenten der Vektoren  $\theta \in \Theta$  bezeichnen wir mit

$$\theta = (\xi(S, t, u), \tau(S, t, u), \phi(S, t, u))^T.$$

Der Raum  $M$  ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. In diesem Fall lässt sich das Element des Vektorfeldes  $\Theta$  über  $M$  in der Form

$$V = \theta \cdot \nabla = \xi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial S} + \tau(S, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.20)$$

darstellen, wobei  $\xi(S, t, u)$ ,  $\tau(S, t, u)$  und  $\phi(S, t, u)$  glatte Funktionen ihrer Variablen sind und  $\nabla$  der Nabla-Operator ist

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

**Definition 3.1.8** *Der Operator (3.20) heißt eine infinitesimale Erzeugende oder ein infinitesimaler Generator der Lie-Gruppe  $G(A)$ .*

Aus der Definition (3.1.7) folgt, dass es einen Zusammenhang zwischen einer Lie-Gruppe der Punkttransformationen und ihrem Tangentialvektorraum geben muss.

**Theorem 3.1.2 (Das erste Fundamentaltheorem von Sophus Lie)** *Sei ein Vektorraum mit Elementen  $V$  (3.20) gegeben. Dann erzeugt eine Transformationsgruppe mit der Abbildung  $g : (S, t, u) \rightarrow (\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u})$ , die als eine eindeutige Lösung der folgenden Cauchy-Aufgabe für System der gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\frac{dg_S}{da} = \xi(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad g_S(S, t, u; 0) = S; \quad (3.21)$$

$$\frac{dg_t}{da} = \tau(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad g_t(S, t, u; 0) = t; \quad (3.22)$$

$$\frac{dg_u}{da} = \phi(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad g_u(S, t, u; 0) = u; \quad (3.23)$$

*bestimmt wird, eine einparametrische Lie-Gruppe der Punkttransformationen, für die der gegebene Vektorraum ihr Tangentialraum ist.*

Ein Tangentialvektor  $\theta^{(m)}$  der erweiterten Gruppe  $G^{(m)}(A)$  wird in der Form

$$\theta^{(m)} = (\xi(S, t, u), \tau(S, t, u), \phi(S, t, u), \phi^{(1)}(S, t, u), \dots, \phi^{(m)}(S, t, u))^T$$

dargestellt, wobei  $\phi^{(k)}(S, t, u)$  die Komponenten des Vektors im Raum  $U_{(k)}$  sind,  $k = 1, 2, \dots, m$ . In endlich dimensionalen Räumen  $M^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  lassen sich die

Vektoren wie folgt darstellen,

$$\begin{aligned} pr^{(1)}V &= \xi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial S} + \tau(S, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \\ &+ \phi^S(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_S} + \phi^t(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_t} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} pr^{(2)}V &= \xi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial S} + \tau(S, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \\ &+ \phi^S(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_S} + \phi^t(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_t} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &+ \phi^{SS}(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_{SS}} + \phi^{St}(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_{St}} + \phi^{tt}(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \\ &\dots\dots\dots \\ pr^{(m)}V &= \xi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial S} + \tau(S, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(S, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \\ &+ \dots + \phi^{tt\dots t}(S, t, u) \frac{\partial^m}{\partial u_{tt\dots t}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dabei sind die Funktionen  $\phi^S(S, t, u)$ ,  $\phi^t(S, t, u)$ ,  $\dots$ ,  $\phi^{tt\dots t}(S, t, u)$  glatt.

**Definition 3.1.9** Ein Vektor  $pr^{(k)}V$  in der Form (3.24)-(3.26) heißt eine  $k$ -te Erweiterung der infinitesimalen Erzeugenden  $V$  (3.20) im Raum  $M^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Die infinitesimalen Generatoren haben einen wichtigen Vorteil gegenüber den endlichen Gruppentransformationen: sie sind lineare Operatoren, so dass eine lineare Kombination von infinitesimalen Generatoren wieder ein infinitesimaler Generator ist. Eine andere Frage ist, ob die Erzeugenden in beliebiger Reihenfolge angewandt werden können. Das bedeutet gleichzeitig, ob die Gruppentransformationen vertauschbar sind. Wir führen folgende Definition ein.

**Definition 3.1.10** Der Kommutator zweier Erzeugenden  $V_i$  und  $V_j$  ist durch

$$[V_i, V_j] = V_i V_j - V_j V_i \quad (3.27)$$

definiert.

Der Kommutator ist wieder ein linearer Operator mit den Eigenschaften, die wir im nachfolgenden Lemma 3.1.2 zusammenfassen.

**Lemma 3.1.2** Für lineare Operatoren  $V_i$ ,  $V_j$ ,  $V_k$  (unter anderem für die infinitesimalen Erzeugenden) gelten folgende Eigenschaften der entsprechenden Kommutatoren:

(a) *Bilinearität*

$$[c_i V_i + c_j V_j, V_k] = c_i [V_i, V_k] + c_j [V_j, V_k],$$

$$[V_k, c_i V_i + c_j V_j] = c_i [V_k, V_i] + c_j [V_k, V_j],$$

mit beliebigen Konstanten  $c_i, c_j, c_k$ ,

(b) *Antikommutativität*

$$[V_i, V_j] = -[V_j, V_i],$$

(c) *Jacobi-Identität*

$$[V_i, [V_j, V_k]] + [V_j, [V_k, V_i]] + [V_k, [V_i, V_j]] = 0.$$

Der Beweis folgt aus direkten Berechnungen und der Definition (3.1.10).

Die Konstanten  $c_{ij} = [V_i, V_j]$  heißen *Strukturkonstanten*. Aus Lemma 3.1.2 folgt offensichtlich, dass  $c_{ij} = -c_{ji}$  gilt.

**Definition 3.1.11** Ein Vektorraum heißt eine Lie-Algebra, wenn eine bilineare Operation der Kommutation mit den Eigenschaften aus Lemma 3.1.2 auf diesem Raum definiert und abgeschlossen ist.

Wir werden eine Lie-Algebra, die durch eine Relation (3.9) bestimmt ist, mit  $\mathcal{A}_\Delta$  bezeichnen. Der Vektor  $V$  (3.20) ist nach Konstruktion ein Element der Lie-Algebra  $\mathcal{A}_\Delta$  und der Vektor  $pr^{(m)}V$  (3.26) ist entsprechend ein Element der Lie-Algebra  $\mathcal{A}_\Delta^{(m)}$ .

Wir kehren zur Betrachtung des speziellen Falls  $M^{(2)}$  zurück. Wir beschreiben die Prozedur des Aufbaus einer Lie-Algebra  $\mathcal{A}_\Delta^{(2)}$ . Die Elemente dieser Algebra sind die Vektoren  $pr^{(2)}V$  (3.25). Die allgemeine Prozedur des Aufbaus einer Lie-Algebra ist ausführlich in den Büchern [6], [59], [60] dargestellt. Die Funktionen  $\phi^S(S, t, u)$ ,  $\phi^t(S, t, u)$ ,  $\phi^{SS}(S, t, u)$ ,  $\phi^{St}(S, t, u)$ ,  $\phi^{tt}(S, t, u)$ , welche die Komponenten des Vektors  $pr^{(2)}V$  bilden, können eindeutig mit Hilfe der Funktionen  $\xi(S, t, u)$ ,  $\tau(S, t, u)$ ,  $\phi(S, t, u)$  bestimmt werden.

Aus (3.11) und der Definition (3.1.7) folgt

$$\phi^S(S, t, u) = \left. \frac{\partial}{\partial a} \psi^S(S, t, u; a) \right|_{a=0}, \quad \phi^t(S, t, u) = \left. \frac{\partial}{\partial a} \psi^t(S, t, u; a) \right|_{a=0}. \quad (3.28)$$

Die Funktionen  $\phi^{SS}(S, t, u)$ ,  $\phi^{St}(S, t, u)$ ,  $\phi^{tt}(S, t, u)$  werden analog bestimmt. Wir zeigen nun, wie eine der Funktionen, z.B.  $\phi^S(S, t, u; a)$ , berechnet wird. Wir führen die Bezeichnung für die totale Ableitung  $D_S^k$  der Ordnung  $k$  bezüglich der Variablen  $S$  ein

$$D_S^1 = \frac{\partial}{\partial S} + u_S \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.29)$$

$$D_S^2 = \frac{\partial}{\partial S} + u_S \frac{\partial}{\partial u} + u_{SS} \frac{\partial}{\partial u_S} + u_{St} \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad (3.30)$$

$$D_S^{k+1} = \frac{\partial}{\partial S} + \sum_{r=0}^k u_{j_1 j_2 \dots j_r S} \frac{\partial^r}{\partial u_{j_1 j_2 \dots j_r}}, \quad (3.31)$$

wobei  $j_1, j_2, \dots, j_r$  unabhängig voneinander die Werte  $S, t$  annehmen. Auf gleiche Weise kann man die totale Ableitung  $D_t^1$  bezüglich  $t$  definieren. Durch  $\tilde{D}_{\tilde{S}}^k$  wird die totale Ableitung in der Variablen  $\tilde{S}$  bezeichnet. Nach der Kettenregel gilt  $D_S^1 \tilde{u} := D_S^1 g_u$  und entsprechend

$$D_S^1 g_u = D_S^1 g_S \cdot \tilde{u}_{\tilde{S}} + D_S^1 g_t \cdot \tilde{u}_{\tilde{t}}. \quad (3.32)$$

Nach der Ableitung bezüglich des Parameters  $a$  im Punkt  $a = 0$  erhalten wir unter Berücksichtigung von (3.12), (3.19), (3.28) eine Formel zur Berechnung der Funktion  $\phi^S$

$$\phi^S = D_S^1 \phi - (D_S^1 \xi \cdot u_S + D_S^1 \tau \cdot u_t), \quad (3.33)$$

die sich wie folgt darstellen läßt

$$\phi^S(S, t, u) = \phi_S + u_S \phi_u - u_S \xi_S - u_S u_t \tau_u - u_t \tau_S - (u_S)^2 \xi_u. \quad (3.34)$$

Die allgemeine Form der Funktionen  $\phi^t, \phi^{SS}$  u.a. in der zweiten Erweiterung  $pr^{(2)}V$  des Generators  $V$  läßt sich durch eine rekursive Formel bestimmen.

**Theorem 3.1.3** *Im Fall einer abhängigen Variablen  $u$  und zweier unabhängiger Variablen  $S$  und  $t$  lassen sich die Koeffizienten der  $k$ -ten Erweiterung  $pr^{(k)}V$  des infinitesimalen Operators  $V$  nach folgender rekursiven Formel darstellen*

$$\phi^S = D_S^1 \phi - (D_S^1 \xi \cdot u_S + D_S^1 \tau \cdot u_t), \quad (3.35)$$

$$\phi^{j_1 j_2 \dots j_k S} = D_S^{k+1} \phi^{j_1 j_2 \dots j_k} - (u_{j_1 j_2 \dots j_k S} D_S^1 \xi + u_{j_1 j_2 \dots j_k t} D_S^1 \tau), \quad (3.36)$$

wobei  $j_1, j_2, \dots, j_k$  unabhängig voneinander die Werte  $S$  und  $t$  annehmen und  $k = 0, 1, \dots$  ist.

Der Beweis, sowie die exakte Form der Funktionen  $\phi^t, \phi^{SS}, \phi^{St}, \phi^{tt}$  u.a. sind z.B. in den Büchern ([29], [59], [74]) dargestellt.

Das folgende Theorem 3.1.4 gestattet uns, die Funktionen  $\xi, \tau, \phi$  bzw.  $\phi^S, \phi^t, \phi^{SS}, \phi^{St}, \phi^{tt}$  zu bestimmen. Danach kann man versuchen, mit Hilfe des Fundamentalsatzes von Sophus Lie 3.1.2 eine Lie-Gruppe explizit zu bestimmen. Wie wir früher betont haben, gelingt das jedoch nicht in jedem Fall.

**Theorem 3.1.4** *Eine Lie-Gruppe der Punkttransformation mit der Erzeugenden (3.20) ist eine Symmetriegruppe der Gleichung  $\Delta(x, u^{(2)}) = 0$  genau dann, wenn*

$$pr^{(2)}V(\Delta) \equiv 0 \pmod{\Delta = 0} \quad (3.37)$$

*gilt.*



Die Formulierung “mod  $\Delta = 0$ ” bedeutet, dass die Relation  $\Delta = 0$  in dem Jet-Raum  $M^{(2)}$  zu berücksichtigen ist, wenn man (3.37) auswertet. Im geometrischen Sinne bedeutet  $\Delta = 0$ , dass die Bedingung (3.37) auf der Lösungsmannigfaltigkeit  $L_\Delta$  erfüllt werden soll. Folgende Relation können wir zur Vereinfachung der Berechnungen benutzen

$$-u_t = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{u_{ss}}{(1 - \rho S u_{ss})^2}. \quad (3.38)$$

Die Gleichung (3.8) enthält nur die Variablen  $S$ ,  $u_{ss}$ ,  $u_t$ . Deswegen brauchen wir bei den Berechnungen nur die explizite Form der Funktionen  $\phi^t$  und  $\phi^{ss}$  [59],

$$\phi^t(S, t, u) = \phi_t + u_t \phi_u - u_S \xi_t - u_S u_t \xi_u - u_t \tau_t - (u_t)^2 \tau_u, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \phi^{ss}(S, t, u) &= \phi_{ss} + 2u_S \phi_{su} + u_{ss} \phi_u \\ &+ (u_S)^2 \phi_{uu} - 2u_{ss} \xi_S - u_S \xi_{ss} - 2(u_S)^2 \xi_{Su} \\ &- 3u_S u_{ss} \xi_u - (u_S)^3 \xi_{uu} - 2u_{St} \tau_S - u_t \tau_{SS} \\ &- 2u_S u_t \tau_{Su} - (u_t u_{ss} + 2u_S u_{St}) \tau_u - (u_S)^2 u_t \tau_{uu}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Wir berechnen die Ableitungen, die in der Symmetriebedingung (3.25) auftreten, unter Berücksichtigung der Relation (3.38)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S}(\Delta(x, u^{(2)})) &= \frac{\sigma^2 S u_{ss}}{(1 - \rho S u_{ss})^3} \\ &= -u_t \frac{2}{S(1 - \rho S u_{ss})}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{ss}}(\Delta(x, u^{(2)})) &= \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{1 + \rho S u_{ss}}{(1 - \rho S u_{ss})^3} \\ &= -u_t \frac{1 + \rho S u_{ss}}{u_{ss}(1 - \rho S u_{ss})}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Weiter gilt  $\partial(\Delta)/\partial u_t = 1$  und alle andere Ableitungen in (3.25), abgesehen von (3.41) und (3.42), sind gleich Null. Setzen wir (3.41), (3.42) in (3.37) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$-2\xi u_t u_{ss} + (S u_{ss} - \rho S^2 u_{ss}^2) \phi^t - (S u_t + \rho S^2 u_{ss} u_t) \phi^{ss} \equiv 0. \quad (3.43)$$

Verwenden wir nun die explizite Formeln (3.39), (3.40) für  $\phi^{ss}$ ,  $\phi^t$ , so nimmt die

Gleichung (3.43) die Form

$$\begin{aligned}
& (-2\xi - \tau_t S + 2\xi_S S + \phi_{SS} \rho S^2) u_t u_{SS} + \rho S^2 (2\xi_S + \tau_t - 2\phi_u) u_{SS}^2 u_t \\
& + (2\xi_u S + \rho x^2 (\xi_{SS} - 2\phi_{Su})) u_{SS} u_S u_t + 4\xi_u \rho S^2 u_{SS}^2 u_S u_t + (\tau_{SS} \rho S^2 - \tau_u S) u_{SS} u_t^2 \\
& + \phi_t S u_{SS} - \phi_t \rho S^2 u_{SS}^2 + \xi_t \rho S^2 u_S u_{SS}^2 - \xi_t S u_S u_{SS} + \xi_{uu} S u_t u_S^3 \\
& + 2\tau_u \rho S^2 u_t^2 u_{SS}^2 + \tau_{SS} S u_t^2 - \phi_{SS} S u_t + S(\xi_{SS} - 2\phi_{Su}) u_t u_S + S(2\xi_{Su} - \phi_{uu}) u_t u_S^2 \\
& + \rho S^2 (2\xi_{Su} - \phi_{uu}) u_S^2 u_t u_{SS} + \rho S^2 \xi_{uu} u_S^3 u_t u_{SS} + 2\tau_{Su} S u_S u_t^2 + 2\tau_{Su} \rho S^2 u_S u_{SS} u_t^2 \\
& + 2\tau_S S u_t u_{SS} + 2\tau_S \rho S^2 u_t u_{SS} u_{St} - \tau_{uu} S u_S^2 u_t^2 - \tau_{uu} \rho S^2 u_S^2 u_t^2 u_{SS} \\
& + \tau_u S u_t^2 u_{SS} + 2\tau_u S u_S u_t u_{St} + 2\tau_u \rho S^2 u_t u_S u_{SS} u_{St} \equiv 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

an. Diese Gleichung stellt eine algebraische Relation in dem Jet-Raum  $M^{(2)}$  dar. Wegen der Unabhängigkeit der Variablen  $u_S, u_t$  u.a. im Jet-Raum  $M^{(2)}$  müssen alle Koeffizienten vor jedem einzelnen Glied ( $u_t u_{SS}, u_t u_{SS}^2$  usw.) in dieser Gleichung gleich Null sein. Wir erhalten ein System elementarer Differentialgleichungen zur Bestimmung der Symmetriegruppe  $G_\Delta$  der ursprünglichen Differentialgleichung (3.1), welches in der Tabelle 3.1 zusammengefasst ist.

(a)	(b)	(c)	(d)
$\tau_{Su} = 0$	$\xi_t = 0$	$\phi_t = 0$	$-2\xi - \tau_t S + 2\xi_S S = 0$
$\tau_{uu} = 0$	$\xi_u = 0$	$\phi_{SS} = 0$	$2\xi_S + \tau_t - 2\phi_u = 0$
$\tau_{SS} = 0$	$\xi_{uu} = 0$		$\xi_{SS} = 2\phi_{Su}$
$\tau_S = 0$			$2\xi_{Su} = \phi_{uu}$
$\tau_u = 0$			

Tabelle 3.1: Die Differentialgleichungen der Symmetriegruppe  $G_\Delta$ .

Die Spalte (a) weist darauf hin, dass die Funktion  $\tau$  nur von der Variablen  $t$  abhängt und es gilt  $\tau = \tau(t)$ . Die Gleichungen in der Spalte (b) zeigen, dass  $\xi$  eine Funktion nur von der Variablen  $S$  ist. Aus der Voraussetzung  $\xi = \xi(S)$  und der vierten Gleichung in der Spalte (d) schließen wir, dass  $\phi_{uu} = 0$  ist, was zusammen mit den Gleichungen in der Spalte (c) zur folgenden Gestalt der Funktion  $\phi$  führt,

$$\phi = c_1 S + c_2 u + c_3 S u + c_4, \tag{3.45}$$

wobei  $c_1, c_2, c_3, c_4$  beliebige Konstanten sind. Aus der dritten Gleichung der Spalte (d) folgt

$$\xi_{SS} = 2c_3 \quad \Rightarrow \quad \xi_S = 2c_3 S + b_1 \quad \Rightarrow \quad \xi = c_3 S^2 + b_1 S + b_2. \tag{3.46}$$

Setzen wir jetzt die Funktionen  $\phi$  aus (3.45) und  $\xi$  aus (3.46) in die zweite Gleichung in der Spalte (d) ein, so erhalten wir die Bedingung für die Funktion  $\tau$

$$\tau_t = 2(c_2 - b_1 - c_3 S). \tag{3.47}$$

Aus der ersten Gleichung der Spalte (d) folgt schließlich

$$\begin{aligned} 4c_3S^2 - 2S(c_2 - b_1) - 2b_2 &= 0 \quad \forall S, \\ \Rightarrow c_2 &= b_1, \quad c_3 = 0, \quad b_2 = 0, \\ \Rightarrow \tau_t &= 0, \quad \Rightarrow \tau = \text{const.} \end{aligned}$$

Wir fassen alle Ergebnisse zusammen und finden, dass die gesuchten Funktionen  $\xi, \tau, \phi$  folgende Form haben

$$\xi = a_1S, \quad \tau = a_2, \quad \phi = a_1u + a_3S + a_4, \quad (3.48)$$

wobei  $a_1, a_2, a_3, a_4$  beliebige Konstanten sind. Der Generator  $V$  in allgemeiner Form (3.20) sieht dann wie folgt aus

$$V = a_1S \frac{\partial}{\partial S} + a_2 \frac{\partial}{\partial t} + (a_1u + a_3S + a_4) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.49)$$

Wir können  $a_1, a_2, a_3, a_4$  beliebig wählen. Setzen wir z.B. eine der Konstanten  $a_i$  ungleich Null und andere drei  $a_j, j \neq i$ , gleich Null ein, so erhalten wir die vier infinitesimalen Erzeugenden in der Form

$$\begin{aligned} V_1 &= S \frac{\partial}{\partial S} + u \frac{\partial}{\partial u}, & V_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ V_3 &= S \frac{\partial}{\partial u}, & V_4 &= \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Wir berechnen alle Kommutatoren der infinitesimalen Generatoren (3.50)

$$\begin{aligned} c_{12} &:= [V_1, V_2] = 0, & c_{13} &:= [V_1, V_3] = 0, & c_{23} &:= [V_2, V_3] = 0, \\ c_{24} &:= [V_2, V_4] = 0, & c_{34} &:= [V_3, V_4] = 0, & c_{14} &:= [V_1, V_4] = -V_4. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Aus der Definition 3.1.11 folgt, dass die Menge aller Generatoren  $V_i, i = 1, 2, 3, 4$ , (3.50) zusammen mit den Strukturkonstanten  $c_{ij}, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4$ , berechnet in (3.51), eine endlichdimensionale Lie-Algebra  $\mathcal{A}_\Delta$  der betrachteten Lie-Gruppe  $G_\Delta$  bilden. Eine 2-te Erweiterung  $\mathcal{A}_\Delta^{(2)}$  dieser Algebra  $\mathcal{A}_\Delta$  ist eine Unter algebra von der Algebra der Diffeomorphismen  $\text{Diff}(M^{(2)})$  des Raumes  $M^{(2)}, \mathcal{A}_\Delta^{(2)} \subset \text{Diff}(M^{(2)})$ . Man kann umgekehrt zeigen, dass es für eine Lie-Algebra  $\mathcal{A}$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  immer eine Lie-Transformationsgruppe  $G$  existiert, deren infinitesimale Erzeugenden  $V$  durch diese Algebra  $\mathcal{A}$  generiert werden [59], [74].

Nachdem wir die Lie-Algebra  $\mathcal{A}_\Delta$  der nichtlinearen Modellgleichung (3.1) definiert haben, ist es interessant, diese Lie-Algebra mit der Lie-Algebra des Black-Scholes-Modells (D.5) zu vergleichen. Im folgenden Beispiel geben wir alle infinitesimalen Erzeugenden der Lie-Algebra der Black-Scholes-Gleichung an.

### Beispiel 3.1.1

In [30] wurde von Ibragimov und Gazizov eine Lie-Algebra der klassischen linearen Black-Scholes-Gleichung abgeleitet. Die Autoren haben eine drei parametrische Familie der Gleichungen

$$u_t + \frac{1}{2}A^2S^2u_{SS} + BSu_S - Cu = 0 \quad (3.52)$$

betrachtet, wobei  $A, B, C$  beliebige Konstanten sind. Zu der Familie (3.52) gehört auch die Black-Scholes-Gleichung bei einer bestimmten Auswahl der Parameter. Die ersten sechs infinitesimalen Erzeugenden  $V_1 - V_6$  bilden die Lie-Algebra  $\mathcal{A}_{BS}$  der Gleichung (3.52)

$$\begin{aligned} V_1 &= S \frac{\partial}{\partial S}, & V_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ V_3 &= A^2tS \frac{\partial}{\partial S} + (\ln S - Dt)u \frac{\partial}{\partial u}, \\ V_4 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + (\ln S + Dt)S \frac{\partial}{\partial S} + 2Ctu \frac{\partial}{\partial u}, \\ V_5 &= 2A^2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2A^2tS \ln S \frac{\partial}{\partial S} + ((\ln S - Dt)^2 + 2A^2Ct^2 - A^2t)u \frac{\partial}{\partial u}, \\ V_6 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & V_\phi &= \phi(S, t) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

wobei  $D = B - A^2/2$  gilt und  $\phi(S, t)$  eine beliebige Lösung der Gleichung (3.52) ist. Die Existenz des infinitesimalen Generators  $V_2$  entspricht der Tatsache, dass die Koeffizienten der Gleichung keine explizite Abhängigkeit von der Variablen  $t$  aufweisen. Somit ist zu erwarten, dass der Generator  $V_2$  auch in der Lie-Algebra  $\mathcal{A}_\Delta$  auftreten wird. Dieser Generator bedeutet die Invarianz der Gleichung bezüglich Translationen in  $t$ -Richtung. Der Operator  $V_\phi$  widerspiegelt die Linearität der Gleichung (3.52) und bedeutet, dass eine Summe von zwei Lösungen einer linearen Gleichung wieder eine Lösung derselben Gleichung ist. Die Erzeugende  $V_6$  entspricht der Homogenität einer linearen Differentialgleichung. Somit werden diese beiden Operatoren im nichtlinearen Fall nicht zu erwarten sein.

## 3.2 Bestimmung der Lie-Gruppe der Symmetrien für die Modellgleichung

### 3.2.1 Endliche Gleichungen für die Symmetriegruppe $G_\Delta$

Laut dem ersten Fundamentalsatz (3.1.2) von Sophus Lie haben wir für den allgemeinen Generator  $V$  (3.49) ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

(3.21)-(3.23) zu lösen, um die explizite Form einer Symmetriegruppe von Punkttransformationen  $G_\Delta$  zu erhalten. Die Funktionen  $\xi, \tau, \phi$  im Punkt  $(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u})$  haben mit Rücksicht auf (3.18) die Form

$$\xi(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u}) = a_1 g_S, \quad \tau(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u}) = a_2, \quad \phi(\tilde{S}, \tilde{t}, \tilde{u}) = a_1 g_u + a_3 g_S + a_4. \quad (3.53)$$

Für den Generator  $V$  (3.49) lautet folglich das System (3.21)-(3.23)

$$\frac{dg_S}{da} = a_1 g_S, \quad (3.54)$$

$$\frac{dg_t}{da} = a_2, \quad (3.55)$$

$$\frac{dg_u}{da} = a_1 g_u + a_3 g_S + a_4, \quad (3.56)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$g_S(S, t, u; 0) = S, \quad g_t(S, t, u; 0) = t, \quad g_u(S, t, u; 0) = u. \quad (3.57)$$

Dieses System hat folgende Lösung

$$g_S = S e^{a_1 a}, \quad (3.58)$$

$$g_t = t + a_2 a, \quad (3.59)$$

$$g_u = u e^{a_1 a} + a_3 a S e^{a_1 a} + \frac{a_4}{a_1} (e^{a_1 a} - 1), \quad a_1 \neq 0, \quad (3.60)$$

$$g_u = u + a_3 a S + a_4 a, \quad a_1 = 0. \quad (3.61)$$

Die Konstanten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  und der Transformationsparameter  $a$  sind beliebig, was es uns erlaubt, eine bestimmte Art der Transformation zu wählen. Fixieren wir z.B.  $a_1 = 0, a_3 \neq 0$  und  $a_2, a_4, a$  beliebig, so erhalten wir

$$g_S = S, \quad g_t = t + q_2, \quad g_u = u + q_3 S + q_4,$$

wobei die Konstanten  $q_2 = a_2 a, q_3 = a_3 a, q_4 = a_4 a$  eingeführt werden. Die neuen Variablen  $(\tilde{S}, \tilde{t})$  und die neue Funktion  $\tilde{u}$  sind durch die Gleichungen

$$\tilde{S} = S, \quad \tilde{t} = t + q_2, \quad \tilde{u} = u + q_3 S + q_4$$

bestimmt. Das bedeutet, falls  $u(S, t)$  eine Lösung der Gleichung (3.1) ist, dann ist auch die Funktion

$$\tilde{u}(\tilde{S}, \tilde{t}) := u(S, t + q_2) + q_3 S + q_4 \quad (3.62)$$

eine Lösung derselben Gleichung. Die Transformation (3.62) ist trivial in dem Sinne, dass sie aus der Gestalt der Differentialgleichung (3.1) erraten werden könnte. Die Gleichung (3.1) enthält die Funktion  $u$  in expliziter Form nicht, sowie keine

erste Ableitung nach  $S$ . Somit ist leicht zu erkennen, dass eine Transformation der Art (3.62) aus der Form der Differentialgleichung (3.1) bestimmt werden kann.

Die Form der allgemeinen Symmetrietransformation  $g \in G_\Delta$  lässt sich wie folgt darstellen

$$g : (S, t, u) \rightarrow (q_1 S, t + q_2, q_1 u(q_1 S, t + q_2) + q_3 q_1 S + q_5), \quad a_1 \neq 0, \quad (3.63)$$

$$g : (S, t, u) \rightarrow (S, t + q_2, u(S, t + q_2) + q_3 S + q_4), \quad a_1 = 0, \quad (3.64)$$

wobei  $q_1 = e^{a_1 a}$ ,  $q_1 \neq 0$ ,  $q_5 = a_4/a_1(e^{a_1 a} - 1)$  beliebige Konstanten sind. Somit haben wir explizit die vollständige Symmetriegruppe  $G_\Delta$  der ursprünglichen Gleichung (3.1) bestimmt.

Die Transformation (3.63) bedeutet unter anderem, dass wenn wir nur die Variable  $S$  mit einer Konstante  $q_1$  multiplizieren, die Funktion  $u(q_1 S, t)$  der Gleichung

$$u_t + \frac{\sigma^2 \tilde{S}^2}{2} \frac{u_{\tilde{S}\tilde{S}}}{(1 - \rho q_1 \tilde{S} u_{\tilde{S}\tilde{S}})^2} = 0$$

genügt, wobei  $\tilde{S} = q_1 S$  ist. Multiplizieren wir nur die Funktion  $u(S, t)$  mit  $q_1$ , dann genügt die neue Funktion  $\tilde{u}(S, t) = q_1 u(S, t)$  der Gleichung

$$\tilde{u}_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\tilde{u}_{SS}}{\left(1 - \rho \frac{1}{q_1} S \tilde{u}_{SS}\right)^2} = 0.$$

Diese beide Eigenschaften werden wir später im Kapitel 5 benutzen.

### 3.2.2 Unabhängige Invarianten der Symmetriegruppe $G_\Delta$

Im vorigen Abschnitt haben wir eine Symmetriegruppe  $G_\Delta$  explizit beschrieben (3.63), (3.64). Unter der Wirkung dieser Gruppe bleibt die Lösungsmannigfaltigkeit  $L_\Delta$  invariant.

**Definition 3.2.1** Sei  $G$  eine Transformationsgruppe auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  gegeben. Eine Funktion  $\mathcal{F} : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine invariante Funktion oder kurz eine Invariante, wenn sie sich unter der Wirkung der Gruppe  $G$  wie folgt darstellen lässt,

$$\mathcal{F}(g_x(x, u; a), g_u(x, u; a)) = \mathcal{F}(x, u), \quad \forall (x, u) \in M, \quad g = (g_x, g_u) \in G, \quad a \in A$$

**Lemma 3.2.1 (Invariantenkriterium)** Sei  $G(A)$  eine Gruppe mit einem infinitesimalen Generator  $V$ . Eine Funktion  $\mathcal{F}(x, u)$  ist eine Invariante der Gruppe

$G$  dann und nur dann, wenn sie eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$V\mathcal{F} := \xi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S} + \tau \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = 0$$

ist.

Der Beweis dieses Lemmas, so wie die Betrachtung des allgemeinen Falls, wenn eine Funktion  $\mathcal{F} : M \rightarrow Y$  ihre Werte in einem beliebigen Banachraum  $Y$  hat, ist z.B. in [60] dargelegt.

Es ist offensichtlich, dass jede Funktion einer Invarianten wieder eine Invariante ist. Deswegen werden wir uns nur für funktional unabhängige Invarianten interessieren.

**Definition 3.2.2** Seien glatte Funktionen  $\zeta_1(x, u), \zeta_2(x, u), \dots, \zeta_m(x, u)$  auf  $M$  definiert.  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  heißen funktional abhängig, wenn eine Funktion  $\Xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, die nicht überall identisch gleich Null ist und für ein beliebiges Element  $(x, u) \in M$  gilt

$$\Xi(\zeta_1(x, u), \zeta_2(x, u), \dots, \zeta_m(x, u)) = 0.$$

Anderenfalls heißen diese Funktionen funktional unabhängig.

Der nachfolgende Satz beantwortet die wichtige Frage, wieviele funktional unabhängige Invarianten einer Transformationsgruppe es geben kann. Wir betrachten eine unserem Fall angepasste spezielle Formulierung des Satzes.

**Theorem 3.2.1** Eine einparametrische Symmetriegruppe der Punkttransformationen in  $\mathbb{R}^n$  besitzt genau  $n - 1$  funktional unabhängige Invarianten.

Die Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ . Deswegen hat unsere Symmetriegruppe  $G_\Delta$  zwei funktional unabhängige Invarianten, die eine Basis von Invarianten in  $G_\Delta$  bilden. Die Invarianten können aus Lemma 3.2.1 als erste Integrale des charakteristischen Systems

$$\frac{dS}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\phi} \quad (3.65)$$

bestimmt werden. Aus (3.65) folgt, dass die Basis von Invarianten der Gruppe nicht eindeutig bestimmt werden kann, weil jede glatte Funktion von Invarianten wieder eine Invariante ist. Betrachten wir folgendes System

$$\frac{dS}{a_1 S} = \frac{dt}{a_2}, \quad \frac{dS}{a_1 S} = \frac{du}{a_1 u + a_3 S + a_4}. \quad (3.66)$$

Die Lösung dieses Systems hat die Form

$$\text{Inv}_1 = a_2 \ln S - a_1 t, \quad (3.67)$$

$$\text{Inv}_2 = a_1 \frac{u}{S} - a_3 \ln S + \frac{a_4}{S}, \quad (3.68)$$

wobei  $a_1, a_2, a_3, a_4$  beliebige Konstanten sind.

**Bemerkung 3.2.1** *Ein Orbit einer Transformationsgruppe ist eine invariante Mannigfaltigkeit bezüglich dieser Gruppe. Somit lassen sich Invarianten der Gruppe, welche eine explizite Darstellung besitzt, bestimmen in dem wir den Transformationsparameter  $a$  aus der Darstellung (3.58)-(3.61) eliminieren. Aus den ersten zwei Gleichungen folgt beispielsweise*

$$a = \frac{\tilde{t} - t}{a_2}, \quad \tilde{S} = S e^{\frac{a_1}{a_2}(\tilde{t} - t)},$$

$$\ln \frac{\tilde{S}}{S} = \frac{a_1}{a_2}(\tilde{t} - t),$$

$$\ln \tilde{S} - \frac{a_1}{a_2}\tilde{t} = \ln S - \frac{a_1}{a_2}t =: \text{Inv}_1.$$

*In ähnlicher Weise erhalten wir aus den Gleichungen (3.58) und (3.60) die zweite Invariante (3.68).*

Wir können jetzt  $\text{Inv}_1$  als neue unabhängige Variable  $z$  und  $\text{Inv}_2$  als neue abhängige Variable  $v$  nehmen. Man benutzt eine solche Auswahl von neuen Variablen für die Vereinfachung der ursprünglichen Differentialgleichung. Im unseren Fall wird die nichtlineare partielle Differentialgleichung (3.1) auf eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung reduziert. Die Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung haben die Form  $v = v(z)$ . Sie heißen *invariante Lösungen* der Differentialgleichung. Nach einer speziellen Auswahl der Konstanten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  ist es uns gelungen, eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung zu erhalten und somit eine Familie von invarianten Lösungen der Gleichung (3.1) zu bestimmen. Eine ausführliche Darstellung dieser Prozedur wird im nachfolgenden Kapitel angegeben.



# Kapitel 4

## Invariante Lösungen der Modellgleichung

Im vorigen Kapitel haben wir zwei unabhängige Invarianten, (3.67) und (3.68) der partiellen Differentialgleichung (3.1) bezüglich der Gruppe  $G_\Delta$  (3.63) gefunden. Diese Invarianten können entsprechend als abhängige und unabhängige Variablen gewählt werden. Diese Prozedur ist als symmetrische Reduktion der Gleichung bekannt. Dabei verringert sich die Anzahl der Variablen und in unserem Fall geht die Gleichung von einer partiellen in eine gewöhnliche Differentialgleichung über. Die Lösungen, die mit Hilfe der reduzierten Gleichung gefunden werden, sind invariant bezüglich der Symmetriegruppe  $G_\Delta$  und heißen invariante Lösungen. In diesem Abschnitt betrachten wir ausführlich die Konstruktion der Familien von invarianten Lösungen der Modellgleichung (3.1).

### 4.1 Reduzierte Modellgleichung und ihre Lösungen

#### 4.1.1 Reduktion der Modellgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Wir führen in der Gleichung (3.1) eine Transformation zu einer neuen unabhängigen Variable  $z$  durch, die wir gleich der ersten Invarianten (3.67) setzen

$$z = a_2 \ln S - a_1 t. \quad (4.1)$$

Die gesuchte Funktion  $u(S, t)$  substituieren wir unter Verwendung der zweiten Invarianten (3.68) durch eine Funktion  $v(z)$  gemäß

$$v(z) = a_1 \frac{u}{S} - a_3 \ln S + \frac{a_4}{S}. \quad (4.2)$$

Mit einer geeigneten Auswahl der freien Konstanten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  werden wir versuchen, eine möglichst einfache gewöhnliche Differentialgleichung zu finden. Es ist nicht immer möglich, explizite Lösungen für die reduzierte Gleichung zu finden. Falls es aber gelingt, bringt es viele Vorteile bei der Untersuchung der ursprünglichen nichtlinearen Gleichung.

Wählen wir  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = 0$  und  $a_1, a_2$  beliebig ungleich Null, so erhalten wir folgende Substitution der Funktion  $u(S, t)$

$$u(S, t) = \frac{1}{a_1} S v(z), \quad z = a_2 \ln S - a_1 t. \quad (4.3)$$

Die direkte Berechnung der Ableitungen der Funktion  $u$

$$\begin{aligned} u_S &= \frac{1}{a_1} (v + a_2 v_z) \\ u_{SS} &= \frac{a_2}{a_1 S} (v_z + a_2 v_{zz}) \\ u_t &= -S v_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

führt nach dem Einsetzen von (4.4) in die Gleichung (3.1) zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\Delta_v := v_z (1 - a (v_z + a_2 v_{zz}))^2 - b (v_z + a_2 v_{zz}) = 0, \quad (4.5)$$

wobei zur Vereinfachung der Formeln anstatt der Konstanten  $a_1, a_2, \rho, \sigma$  die neuen Konstanten  $a, b, a_2$

$$a = \frac{a_2}{a_1} \rho, \quad b = \frac{\sigma^2}{2} \frac{a_2}{a_1}, \quad a_2 = a_2, \quad a_1 \neq 0 \quad (4.6)$$

eingeführt wurden. Wir nehmen an, dass die Konstante  $a_2 \neq 0$  ist. Anderenfalls erhalten wir laut (4.5) nur eine triviale Lösung  $u(S) = q_3 S + q_4$ , wobei  $q_3, q_4$  beliebige Konstante sind.

Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (4.5) ist dadurch ausgezeichnet, dass sie die Funktion  $v(z)$  nicht explizit enthält. Somit hat sie eine zweiparametrische Transformationsgruppe  $G_{\Delta_v}$ . Die entsprechende Lie-Algebra  $\mathcal{A}_{\Delta_v}$  hat zwei erzeugende infinitesimale Generatoren

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad U_2 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.7)$$

Wenn wir die Strukturkonstanten der Lie-Algebra  $\mathcal{A}_{\Delta_v}$  betrachten, so stellen wir fest, dass sie gleich Null sind. Somit ist diese Algebra abelsch. Die Wirkung der Lie-Gruppe  $G_{\Delta_v}$  ist transitiv in dem Darstellungsraum. Somit lassen sich alle Integralkurven der Gleichung (4.5) als eine zweiparametrische Familie kongruenter Kurven darstellen. Diese Familie bleibt invariant unter den Translationen (4.7).

Andererseits bedeutet das Vorhanden einer zweidimensionalen abelschen Symmetriegruppe für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, dass ihre Ordnung erniedrigt werden kann und somit die Gleichung auch vollständig integriert werden kann. Die allgemeine Integrationsprozedur umfasst folgende Schritte. Zuerst können wir eine Symmetrie der Gruppe  $G_{\Delta_v}$ , welche von einem der Operatoren  $U_1, U_2$  herrührt, nutzen und die Gleichung auf eine Gleichung erster Ordnung zurückführen. Dann können wir die zweite Symmetrie anwenden und die Gleichung vollständig integrieren. Welcher von beiden Operatoren  $U_1, U_2$  zuerst benutzt wird, spielt im allgemeinen keine Rolle. Die praktische Durchführung dieser Prozedur hängt aber davon ab, ob wir die beiden Integrationen explizit ausführen können. In unserem Fall hat die ursprüngliche Gleichung eine starke Nichtlinearität und die komplette explizite Durchführung von beiden Integrationen gelingt nicht. Wir können nicht die Gesamtheit aller Integralkurven explizit beschreiben sondern nur einige Unterklassen, alle anderen besitzen nur eine implizite Darstellung.

#### 4.1.2 Einfache Familien invarianter Lösungen

Wenn wir nach einfachsten Lösungen der Gleichung (4.5) suchen, können wir annehmen, dass  $v_z = \text{const}$  ist. Falls solche Lösungen existieren, läßt sich der Wert  $v_z$  bestimmen und die Funktion  $v(z)$  finden. Unter der Annahme  $\text{sign } a_2 = \text{sign } a_1$ , womit die Transformation (4.1) die Form

$$z = a_2(\log S - \delta t), \quad \delta = a_1/a_2, \quad \delta > 0 \quad (4.8)$$

annimmt, können wir leicht zwei Familien von solchen Lösungen der Gleichung (4.5) erhalten

$$v(z) = \frac{\delta}{\rho} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\delta}} \right) z + \text{const.} \quad (4.9)$$

Diese Lösungen führen unter Berücksichtigung der Transformationen (4.3) zur folgenden Lösungen der Gleichung (3.1)

$$u(S, t) = \frac{1}{\rho} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\delta}} \right) (S \log S - \delta S t) + S d_0, \quad (4.10)$$

wobei  $d_0$  eine beliebige Konstante ist.

Die Gleichung (3.1) ist nichtlinear und somit kann sie auch singuläre Lösungen besitzen. In diesem Fall lassen sich singuläre Lösungen leicht finden.

Da die Gleichung (4.5) nicht von  $v(z)$  abhängt, führen wir die neue abhängige Variable

$$y(z) = v_z \quad (4.11)$$

ein. Dann gilt  $y_z = v_{zz}$ . Nach dieser Substitution geht die Gleichung (4.5) in eine Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich der neuen unbekannten Funktion  $y(z)$  über. Die Lösungsmenge der Gleichung (4.5) wird durch die Lösung der zweiten Gleichung bestimmt. Erstens, die partikuläre Lösung der Gleichung (4.5)  $v_z = 0 \Rightarrow y = 0$  führt zur Lösung  $v(z) = \text{const}$ . Aus der Transformation (4.3) folgt entsprechend

$$u(S, t) = q_3 S + q_4,$$

wobei  $q_3, q_4$  beliebige Konstanten sind. Die lineare Funktion ist in trivialer Weise immer die Lösung der Gleichung (3.1). Dies ist auch äquivalent zur Bedingung (3.61), welche bedeutet, dass wir zu einer beliebigen Lösung eine lineare Funktion bezüglich  $S$  addieren können. Die zweite Gleichung ist

$$F(y_z, y, z) = 0, \quad y \neq 0, \quad (4.12)$$

wobei die Funktion  $F(y_z, y, z)$  wie folgt definiert ist

$$F(y_z, y, z) := y_z^2 + \frac{2y_z}{ya_2} \left( y^2 - \frac{y}{a} - \frac{b}{2a^2} \right) + \frac{1}{a_2} \left( y^2 - \frac{2}{a}y + \frac{1-b}{a^2} \right), \quad (4.13)$$

$y \neq 0.$

Als nächstes wollen wir die Bereiche, in welchen die Eindeutigkeit der Lösungen dieser Gleichung gegeben ist, bestimmen. Die Eindeutigkeit der Lösung wird bei der Erfüllung der Bedingungen des Theorems über implizite Funktionen [48] garantiert. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, dann kann die Differentialgleichung singuläre Lösungen besitzen.

Um singuläre Lösungen zu finden, müssen wir die Diskriminantenkurve der Gleichung (4.12) untersuchen. Die Diskriminantenkurve wird durch die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$F(y_z, y, z) = 0, \quad y \neq 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial F(y_z, y, z)}{\partial y_z} = 0 \quad (4.15)$$

bestimmt. In unserem Fall erhalten wir aus der Gleichung (4.15), dass

$$y_z = -\frac{1}{ya_2} \left( y^2 - \frac{y}{a} - \frac{b}{2a^2} \right)$$

gelten muss. Wir setzen diesen Wert in die erste Gleichung (4.14) ein und erhalten

$$\left( y^4 - \frac{2y^3}{a} - \frac{y^2}{a^2} (b-1) \right) (a_2 - 1) - \frac{yb}{a^3} - \frac{b^2}{4a^4} = 0. \quad (4.16)$$

Wir betrachten diese Gleichung als eine algebraische Gleichung für die Variable  $y$ . Sie hat zwei komplexwertige und zwei reelle Lösungen. Die reellwertigen Lösungen haben bei  $b = 4$  die Gestalt

$$y_1 = -\frac{1}{a}, \quad y_2 = \frac{2}{a(a_2 - 1)^{1/3} ((\sqrt{a_2} + 1)^{1/3} - (\sqrt{a_2} - 1)^{1/3})}. \quad (4.17)$$

Bei einem beliebigen Wert des Parameters  $b$  haben die Lösungen der algebraischen Gleichung (4.16) eine komplizierte Gestalt. Wir haben zu prüfen, ob die entsprechenden Konstanten (4.17) eine Lösung der Differentialgleichung (4.12) darstellen. Einfaches Einsetzen ergibt, dass nur eine Lösung, nämlich

$$y(z) = -\frac{b}{4a}, \quad (4.18)$$

tatsächlich der Differentialgleichung genügt und zwar bei  $b = 4$ . Somit ist

$$y = -1/a \quad (4.19)$$

eine singuläre Lösung. Entlang der Geraden (4.19) kann die Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichung (4.12) verloren gehen. Ob das wirklich geschieht, werden wir später überprüfen. Hier wollen wir zunächst, von der Form dieser Lösung ausgehend, entsprechende Lösungen für die Gleichung (4.5) und (3.1) finden. Wenn wir die Transformation (4.11) benutzen, so erhalten wir

$$v_{\text{sing}}(z) = -\frac{\delta}{\rho}z + \text{const}, \quad (4.20)$$

als entsprechende singuläre Lösung der Gleichung (4.5). Diese Lösung fällt mit einer der Lösungen (4.9) für  $\delta = \sigma^2/8$  zusammen.

Entsprechend der Transformation (4.3) erhalten wir die singuläre Lösung für die Gleichung (3.1)

$$u_{\text{sing}}(S, t) = -\frac{1}{\rho} \left( S \log S - \frac{\sigma^2}{8} S t \right) + S d_0, \quad (4.21)$$

welche auch zu der früher beschriebenen Menge der Lösungen (4.10) gehört.

### 4.1.3 Implizite Form der invarianten Lösungen der reduzierten Gleichung (4.12)

Die Lösungsmenge der Gleichung (4.12) besteht aus der singulären Lösung (4.19) bei  $b = 4$ , aus den Lösungen der Gleichung  $y = 0$  und aus den Lösungen der beiden

gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y_z = \frac{-\left(y^2 - \frac{y}{a} - \frac{b}{2a^2}\right) \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{4a} + y\right)}}{y a_2}. \quad (4.22)$$

Die Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $a_2$  sind in (4.6) definiert. Die Diskriminantenkurve der Gleichung (4.22) ist die Gerade  $y = -b/4a$  und ist auch eine singuläre Lösung der Gleichung (4.12) bei dem  $b = 4$ . Diese Kurve teilt die Bereiche in reelle und komplexwertige Lösungen auf. Wir werden uns nur für reellwertige Lösungen interessieren. Somit setzen wir voraus, dass

$$y > -\frac{b}{4a}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sigma^2}{2\rho} > 0$$

gilt.

Wegen der Existenz des zweiten Generators  $U_2$  (4.7) in der Symmetriealgebra  $\mathcal{A}_{\Delta_v}$  der Gleichung (4.5) lassen sich in den Gleichungen (4.22) die Variablen separieren und die vollständige Integration wird möglich. Wir erhalten

$$-\int \frac{y a_2}{\left(y^2 - \frac{y}{a} - \frac{b}{2a^2}\right) \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{4a} + y\right)}} dy = z + c,$$

wobei  $c$  eine beliebige Integrationskonstante ist.

Um die expliziten Lösungen der ursprünglichen Gleichung zu erhalten, brauchen wir eine geeignete Darstellung für die linke Seite der Gleichung. Wir bezeichnen das Integral in der letzten Formel mit  $I(y)$

$$I(y) = -\int \frac{y a_2}{\left(y^2 - \frac{y}{a} - \frac{b}{2a^2}\right) \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{4a} + y\right)}} dy. \quad (4.23)$$

und versuchen es in den Fällen zu integrieren. Machen wir eine Variablensubstitution folgender Art

$$y + \frac{b}{4a} = p^2, \quad y > -\frac{b}{4a}. \quad (4.24)$$

Dann gilt

$$y = p^2 - \frac{b}{4a}, \quad dy = 2p dp, \quad y^2 = p^4 - p^2 \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{16a^2}.$$

Nach dem Einsetzen der neuen Variable  $p$  aus Formel (4.24) ins Integral (4.23) erhalten wir einen neuen Ausdruck für das Integral über  $p$

$$I(p) = -2a_2 \int \frac{p \left( p^2 - \frac{b}{4a} \right)}{p^4 - p^2 \left( \frac{b}{2a} + \frac{1}{a} \right) \pm p \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b^2 - 4b}{16a^2}} dp. \quad (4.25)$$

Beide Fälle mit positivem und negativem Vorzeichen unterscheiden sich bezüglich der Integrierbarkeit nicht wesentlich voneinander. Deshalb betrachten wir sie zusammen.

Wir stellen die Polynome im Zähler und im Nenner als Produkte dar,

$$p^2 - \frac{b}{4a} = \left( p - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left( p + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} p^4 - p^2 \left( \frac{b}{2a} + \frac{1}{a} \right) \pm p \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b^2 - 4b}{16a^2} \\ = \left( p \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \left( p \pm \frac{\sqrt{b} + 2}{2\sqrt{a}} \right) \left( p \pm \frac{\sqrt{b} - 2}{2\sqrt{a}} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Setzen wir jetzt die Ausdrücke (4.26), (4.27) ins Integral (4.25) ein, so erhalten wir

$$I(p) = -2a_2 \int \frac{p \left( p \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)}{\left( p \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left( p \pm \frac{\sqrt{b} + 2}{2\sqrt{a}} \right) \left( p \pm \frac{\sqrt{b} - 2}{2\sqrt{a}} \right)} dp.$$

Eine elementare Integration liefert

$$I(p) = \frac{-a_2}{2(b-1)} \ln \left( p \mp \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \right)^{2b} \left( p \pm \frac{\sqrt{b} + 2}{2\sqrt{a}} \right)^{b+\sqrt{b}-2} \left( p \pm \frac{\sqrt{b} - 2}{2\sqrt{a}} \right)^{b-\sqrt{b}-2}, \quad (4.28)$$

wobei  $b \neq 1$  gewählt werden soll.

**Bemerkung 4.1.1** Für  $b = 1$  mit den Möglichkeiten  $\sqrt{b} = \pm 1$  ergibt sich dann aus der Gleichung  $I(p) = z + c$  die implizite Darstellung

$$\frac{4}{e^{(1 \mp 2\sqrt{a}p)} (2\sqrt{a}p \mp 1)^5 (2\sqrt{a}p \pm 3)^3} = c_1 e^{-\frac{4z}{a_2}} \quad (4.29)$$

der Funktion  $p(z)$ . Diese Gleichung lässt sich mit Methoden der qualitativen Analyse untersuchen. Unser Ziel ist es jedoch, eine explizite Form von  $p(z)$  zu erhalten, um dann aus (4.11) und (4.24) eine explizite Form von  $v(z)$  zu gewinnen. Wir werden deshalb diesen Fall nicht weiter verfolgen und beschränken uns auf die Voraussetzung  $b \neq 1$ .

Somit haben wir zwei Familien von Gleichungen für die Bestimmung der Funktion  $v(z)$  erhalten,

$$I_+(p) = z + c, \quad (4.30)$$

$$I_-(p) = z + c, \quad (4.31)$$

wobei wir mit  $I_+(p)$  und  $I_-(p)$  folgende Ausdrücke bezeichnet haben,

$$I_+(p) := \frac{-a_2}{2(b-1)} \ln \left( p - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \right)^{2b} \left( p + \frac{\sqrt{b}+2}{2\sqrt{a}} \right)^{b+\sqrt{b}-2} \left( p + \frac{\sqrt{b}-2}{2\sqrt{a}} \right)^{b-\sqrt{b}-2}, \quad (4.32)$$

$$I_-(p) := \frac{-a_2}{2(b-1)} \ln \left( p + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \right)^{2b} \left( p - \frac{\sqrt{b}+2}{2\sqrt{a}} \right)^{b+\sqrt{b}-2} \left( p - \frac{\sqrt{b}-2}{2\sqrt{a}} \right)^{b-\sqrt{b}-2}. \quad (4.33)$$

Die Konstanten  $a$ ,  $a_2$ ,  $b \neq 1$  sind beliebig, die Variable  $p$  ist nach den Transformationen (4.11), (4.24) mit  $v(z)$  verbunden. Diese Familien von impliziten Lösungen (4.29)-(4.31) enthalten alle Lösungen der Differentialgleichung (4.5). Gelingt es uns aus (4.29)-(4.31), die Funktion  $p$  explizit auszudrücken, so können wir nach (4.11) die explizite Form der Funktion  $v(z)$  gewinnen.

## 4.2 Extraktion expliziter invarianter Lösungen

### 4.2.1 Bestimmung der Parameterbereiche, die eine Inversion der impliziten Funktionen (4.30), (4.31) erlauben

Aus der Gleichung (4.29) lässt sich  $p$  als eine Funktion von  $z$  explizit nicht darstellen. Die beiden Gleichungen (4.30) und (4.31) können in der gleichen Weise gelöst werden und führen zu ähnlichen Resultaten. Wir fangen mit der Untersuchung der Gleichung (4.30) mit  $I_+(p)$  aus (4.32) an. Aus  $I_+(p) = z + c$  folgt

$$\left( p - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \right)^{2b} \left( p + \frac{\sqrt{b}+2}{2\sqrt{a}} \right)^{b+\sqrt{b}-2} \left( p + \frac{\sqrt{b}-2}{2\sqrt{a}} \right)^{b-\sqrt{b}-2} = c_1 e^{-\frac{2(b-1)z}{a_2}}, \quad (4.34)$$



wobei  $c_1 \neq 0$  eine beliebige Konstante ist. Versuchen wir jetzt, einfachste reellwertige Lösungen durch die Auswahl von speziellen Werten für die Konstante  $b$  zu finden.

1. Fall.

Sei  $b + \sqrt{b} - 2 = 0$ . Die Gleichung hat 2 Lösungen:

$\sqrt{b} = 1$ , folglich  $b = 1$ ,

$\sqrt{b} = -2$ , folglich  $b = 4$ .

Die erste Lösung wird weiter wegen Bemerkung 4.1.1 nicht benutzt. Die Gleichung (4.34) wird mit der eingesetzten zweiten Lösung in folgender Weise dargestellt

$$\left(p + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^8 \left(p - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^4 = c_1 e^{-\frac{6z}{a_2}}.$$

Zieht man die vierte Wurzel, so folgt eine Differentialgleichung dritter Potenz bezüglich  $p(z)$

$$p^3 - \frac{3}{a}p - \frac{2}{a\sqrt{a}} - d e^{-\frac{3}{2a_2}z} = 0 \quad (4.35)$$

mit einer beliebigen Konstante  $d \neq 0$ .

2. Fall.

Sei  $b - \sqrt{b} - 2 = 0$ . Zwei Lösungen von dieser Gleichung sind:

$\sqrt{b} = -1$ , folglich  $b=1$ ,

$\sqrt{b} = 2$ , folglich  $b=4$ .

Der Fall  $b = 1$  wird weiter nicht verfolgt (s. Bemerkung 4.1.1). Die Gleichung (4.34) mit  $b = 4$ ,  $\sqrt{b} = 2$  führt zur folgenden Darstellung

$$\left(p - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \left(p + \frac{2}{\sqrt{a}}\right) = d e^{-\frac{3}{2a_2}z},$$

wobei  $d$  – beliebig,  $d \neq 0$ , ist. Schließlich erhält man die Gleichung

$$p^3 - \frac{3}{a}p + \frac{2}{a\sqrt{a}} - d e^{-\frac{3}{2a_2}z} = 0. \quad (4.36)$$

Die Gleichungen (4.35) und (4.36) haben jeweils eine reelle Lösung, die wir im nächsten Abschnitt ausführlich untersuchen werden.

3. Fall.

Seien  $b + \sqrt{b} - 2 = 2b$  oder  $b - \sqrt{b} - 2 = 2b$ .

Beide Gleichungen haben nur imaginäre Nullstellen. Wir suchen nach reellen Lösungen der Gleichung (4.30), deswegen wird dieser Fall nicht weiter untersucht.

4. Fall.

Sei  $b + \sqrt{b} - 2 = -2b$ .

Diese Gleichung hat eine Lösung mit  $\sqrt{b} = -1$ , folglich  $b = 1$ , welche wir aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen haben. Die zweite Lösung ist  $\sqrt{b} = \frac{2}{3}$ , folglich  $b = \frac{4}{9}$ . Die Einsetzung dieser Lösung in die Relation (4.34) führt zur folgenden Gleichung bezüglich  $p$ :

$$\begin{aligned} \left(p - \frac{1}{3\sqrt{a}}\right)^{8/9} \left(p + \frac{4}{3\sqrt{a}}\right)^{-8/9} \left(p - \frac{2}{3\sqrt{a}}\right)^{-20/9} &= c_1 e^{\frac{10z}{9a_2}}, \\ \left(\frac{p - \frac{1}{3\sqrt{a}}}{p + \frac{4}{3\sqrt{a}}}\right)^{4/9} \left(p - \frac{2}{3\sqrt{a}}\right)^{-10/9} &= c_2 e^{\frac{5z}{9a_2}}. \end{aligned}$$

Nach einer Vereinfachung gilt

$$\left(\frac{p + \frac{4}{3\sqrt{a}}}{p - \frac{1}{3\sqrt{a}}}\right)^2 \left(p - \frac{2}{3\sqrt{a}}\right)^5 = d e^{-\frac{5z}{2a_2}} \quad (4.37)$$

mit einer beliebigen Konstante  $d \neq 0$ . Für die Gleichung (4.37) gibt es keinen Weg, die Funktion  $p$  als Funktion von der Variablen  $z$  explizit auszudrücken.

Aus dem Fall  $b + \sqrt{b} - 2 = -2b$  ergibt sich eine Gleichung ähnlich zu (4.37) mit unwesentlichen Unterschieden in den Vorzeichen

$$\left(\frac{p - \frac{4}{3\sqrt{a}}}{p + \frac{1}{3\sqrt{a}}}\right)^2 \left(p + \frac{2}{3\sqrt{a}}\right)^5 = d e^{-\frac{5z}{2a_2}}. \quad (4.38)$$

Eine implizite Darstellung von  $p(z)$ , welche aus den beiden Gleichungen (4.37), (4.38) folgt, erlaubt es uns nicht eine explizite Gestalt von  $v(z)$  zu erhalten. Deswegen werden wir diese Fälle nicht weiter betrachten.

5. Bei den anderen Varianten für die Auswahl der Konstanten  $b$ , die wir untersucht haben, wurden auch keine besseren Ergebnisse als eine Polynomgleichung dritter Potenz gefunden. Eine Untersuchung der reellen Lösungen der

Gleichungen (4.35), (4.36) wird ein zentraler Punkt des nächsten Abschnittes sein.

Die Gleichung  $I_-(p) = z+c$ , wobei  $I_-(p)$  in (4.33) definiert ist, läßt sich in folgender Weise darstellen

$$\left(p + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\right)^{2b} \left(p - \frac{\sqrt{b}+2}{2\sqrt{a}}\right)^{b+\sqrt{b}-2} \left(p - \frac{\sqrt{b}-2}{2\sqrt{a}}\right)^{b-\sqrt{b}-2} = c_1 e^{-\frac{2(b-1)z}{a_2}}, \quad (4.39)$$

wobei  $b \neq 1, b > 0$  und  $c_1$  beliebig gewählt sind. Man kann wieder eine spezielle Wahl der Konstante  $b$  untersuchen, um einfachste Lösungen zu erhalten. Dieser Weg unterscheidet sich unwesentlich von der Untersuchung der Gleichung (4.30) und führt bei  $b = 4, \sqrt{b} = 2$  zur Gleichung (4.35) bzw. bei  $b = 4, \sqrt{b} = -2$  zur Gleichung (4.36). Die anderen betrachteten Möglichkeiten für  $b$  liefern keine neuen Ergebnisse.

## 4.2.2 Explizite Lösungen

Unser Ziel ist es jetzt, die Gleichungen (4.35) und (4.36) zu lösen. Fangen wir mit der Gleichung (4.35) an. Diese Gleichung hat drei Lösungen, darunter eine reelle und zwei imaginäre. Betrachten wir nur die reelle Lösung

$$p(z) = \frac{2^{1/3} e^{z/2a_2}}{\sqrt{a} (a^{3/2}d + 2e^{3z/2a_2} + a^{3/4}\sqrt{d}\sqrt{a^{3/2}d + 4e^{3z/2a_2}})^{1/3}} + \frac{(a^{3/2}d + 2e^{3z/2a_2} + a^{3/4}\sqrt{d}\sqrt{a^{3/2}d + 4e^{3z/2a_2}})^{1/3}}{2^{1/3} e^{z/2a_2} \sqrt{a}}. \quad (4.40)$$

Benutzen wir die Umformung (4.24), so erhalten wir bei den gewählten Werten  $b = 4, \sqrt{b} = -2$  (Fall 1, Seite 73) folgende Transformation

$$v_z(z) = y(z) = p^2(z) - \frac{b}{4a} = p^2(z) - \frac{1}{a}. \quad (4.41)$$

Wegen der Willkürlichkeit der Konstante  $d$  wird auch die Konstante  $a^{3/4}\sqrt{d}$  beliebig sein, die wir von hier an mit  $m$  bezeichnen

$$m = a^{3/4}\sqrt{d} = \left(\frac{a_2}{a_1}\rho\right)^{3/4} \sqrt{d}. \quad (4.42)$$

Weiter wird folgende Formel benutzt

$$(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^2 = 2 \left( m^2 + 2e^{3z/2a_2} + m \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}} \right). \quad (4.43)$$

Setzen wir den Ausdruck (4.40) in die Formel (4.41) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (4.43) folgende Darstellung

$$y(z) = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{2^{4/3} e^{z/a_2}}{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}} + \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}}{2^{4/3} e^{z/a_2}} \right). \quad (4.44)$$

Bezeichnet man

$$K_1 = \frac{2^{4/3} e^{z/a_2}}{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}},$$

$$K_2 = \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}}{2^{4/3} e^{z/a_2}},$$

dann gilt entsprechend der Darstellung (4.44) von  $y$

$$v(z) = \int y(z) dz = \frac{1}{a} \int (1 + K_1 + K_2) dz = \frac{1}{a} \left( z + \int K_1 dz + \int K_2 dz \right).$$

Die Formel nimmt folgende Gestalt

$$v(z) = \frac{1}{a} (z + I_1 + I_2) \quad (4.45)$$

an, wobei durch  $I_1, I_2$  folgende Integrale bezeichnet sind

$$I_1 = \int K_1 dz = 2^{4/3} \int \frac{e^{z/a_2} dz}{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}},$$

$$I_2 = \int K_2 dz = \frac{1}{2^{4/3}} \int \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}}{e^{z/a_2}} dz.$$

Wir berechnen jetzt  $I_1$  und  $I_2$  separat. Führen wir eine neue Variable  $l$  wie folgt ein

$$m^2 + 4e^{3z/2a_2} = l,$$

$$dz = \frac{2a_2}{3(l - m^2)} dl,$$

$$e^{z/a_2} = \frac{(l - m^2)^{2/3}}{2^{4/3}}, \quad (4.46)$$

so läßt sich das Integral  $I_1$  darstellen als

$$I_1 = \frac{2a_2}{3} \int \frac{dl}{(\sqrt{l} + m)^{5/3} (\sqrt{l} - m)^{1/3}}. \quad (4.47)$$

Einsetzen einer neuen Variable  $q$

$$\begin{aligned}\sqrt{l} + m &= q, \\ dl &= 2(q - m) dq, \\ \sqrt{l} - m &= q - 2m,\end{aligned}\tag{4.48}$$

in  $I_1$  aus (4.47) führt zum Integral

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{4a_2}{3} \left( \int \frac{q dq}{q^{5/3}(q - 2m)^{1/3}} - m \int \frac{dq}{q^{5/3}(q - 2m)^{1/3}} \right) = \\ &= \frac{4a_2}{3} (\mathcal{I}_{11} - m \mathcal{I}_{12}),\end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{I}_{11}$ ,  $\mathcal{I}_{12}$  die Bezeichnungen für folgende Integrale sind

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{11} &= \int q^{-2/3}(q - 2m)^{-1/3} dq, \\ \mathcal{I}_{12} &= \int q^{-5/3}(q - 2m)^{-1/3} dq.\end{aligned}\tag{4.49}$$

Die Integrale  $\mathcal{I}_{11}$ ,  $\mathcal{I}_{12}$  lassen sich mit Hilfe des Theorems von Tschebyschev [75] über eine Darstellung von Integralen der Art (4.49) in elementaren Funktionen lösen. Wir führen als Beispiel die Berechnungen für  $\mathcal{I}_{11}$  durch. Die Substitution

$$\begin{aligned}1 - 2m q^{-1} &= r^3, \\ dq &= 2m \frac{3r^2}{(1 - r^3)^2} dr, \\ q^{-1} &= \frac{1 - r^3}{2m},\end{aligned}\tag{4.50}$$

reduziert dann das Integral  $\mathcal{I}_{11}$  auf das leicht zu berechnenden Integral

$$\mathcal{I}_{11} = 3 \int \frac{r}{1 - r^3} dr = -\sqrt{3} \arctan \frac{1 + 2r}{\sqrt{3}} + \ln \frac{(1 + r + r^2)^{1/2}}{r - 1} + c_{11},$$

wobei  $c_{11}$  eine beliebige Konstante ist. Man kann die entsprechenden Berechnungen mit Hilfe der gleichen Substitution (4.50) für das Integral  $\mathcal{I}_{12}$  durchführen. So erhält man

$$\mathcal{I}_{12} = \frac{3}{4m} r^2 + c_{12},$$

wobei  $c_{12}$  eine beliebige Konstante ist. Setzt man die Ausdrücke für die beiden Integrale  $\mathcal{I}_{11}$ ,  $\mathcal{I}_{12}$  in  $I_1$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{4a_2}{3} (\mathcal{I}_{11} - m \mathcal{I}_{12}) \\
&= \frac{4a_2}{3} \left( -\sqrt{3} \arctan \frac{1+2r}{\sqrt{3}} + \ln \frac{(1+r+r^2)^{1/2}}{r-1} + c_{11} - m \frac{3}{4m} r^2 - m c_{12} \right) \\
&= \frac{4a_2}{3} \left( -\sqrt{3} \arctan \frac{1+2r}{\sqrt{3}} + \ln \frac{(1+r+r^2)^{1/2}}{r-1} \right) - a_2 r^2 + c_1, \tag{4.51}
\end{aligned}$$

wobei  $c_1 = 4a_2(c_{11} - mc_{12})/3$  eine beliebige Konstante ist. Auf dem gleichen Weg läßt sich das Integral

$$I_2 = \frac{1}{2^{4/3}} \int \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}})^{4/3}}{e^{z/a_2}} dz$$

berechnen. Die Substitutionen (4.46) und (4.48) führen zur Darstellung

$$I_2 = \frac{4a_2}{3} \left( \int \frac{q^{2/3}}{(q-2m)^{5/3}} dq - m \int \frac{dq}{q^{1/3}(q-2m)^{5/3}} \right).$$

Wie früher kann man die Integration mit Hilfe von Integralen über Binomialausdrücke und von Substitutionen (4.50) ausführen. Dann ergibt sich

$$I_2 = \frac{4a_2}{3} \left( \sqrt{3} \arctan \frac{1+2r}{\sqrt{3}} + \ln \frac{(1+r+r^2)^{1/2}}{r-1} \right) - \frac{a_2}{r^2} + c_2 \tag{4.52}$$

mit einer beliebigen Konstante  $c_2$ . Setzen wir die Darstellung von  $I_1$  (4.51) und von  $I_2$  (4.52) in (4.45) ein, so erhalten wir die Lösung  $v(z)$  der Gleichung (4.5)

$$v(z) = \frac{1}{a} \left( z - a_2 r^2(z) - \frac{a_2}{r^2(z)} + \frac{8}{3} a_2 \ln \frac{(1+r(z)+r^2(z))^{1/2}}{r(z)-1} + c \right), \tag{4.53}$$

mit

$$r(z) = \left( 1 - \frac{2m}{m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}}} \right)^{1/3} = \left( \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}}}{m + \sqrt{m^2 + 4e^{3z/2a_2}}} \right)^{1/3} \tag{4.54}$$

und wobei  $c = c_1 + c_2$  eine beliebige Konstante ist.

Wir wollen jetzt zur Funktion  $u(S, t)$  zurückkehren und führen die Substitution (4.3) rückwärts aus. Zuerst ersetzen wir die Variable  $z$  nach der Formel

$$z = a_2 \ln S - a_1 t. \tag{4.55}$$

Aus der zweiten Relation in (4.6) und der Beschränkung  $b = 4$  folgt

$$z = a_2 \left( \ln S - \frac{\sigma^2}{8} t \right). \quad (4.56)$$

Dann läßt sich die Funktion  $r(z)$  (4.54) als eine Funktion von  $S, t$  wie folgt darstellen

$$r(S, t) = \left( \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}}}{m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}}} \right)^{1/3}.$$

Wir führen weitere Bezeichnungen ein, die Berechnungen wesentlich vereinfachen

$$\left( m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}} \right) = \alpha_+, \quad (4.57)$$

$$\left( -m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}} \right) = \alpha_-. \quad (4.58)$$

Beachten wir weiter, dass

$$\alpha_+ \alpha_- = 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}, \quad \alpha_+ - \alpha_- = 2m$$

gilt. Nachfolgendes Lemma hilft uns, eine einfache Form der Funktion  $v(z)$  zu erhalten.

**Lemma 4.2.1** *Es gelten folgende Relationen*

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3} \ln \frac{(1 + r(S, t) + r^2(S, t))^{1/2}}{r(S, t) - 1} \\ &= -4 \ln \left( \left( m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}} \right)^{1/3} - \left( -m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}} \right)^{1/3} \right) \\ &+ \text{const}, \\ & r^2(S, t) + \frac{1}{r^2(S, t)} \\ &= \frac{\left( m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}} \right)^{4/3} + \left( -m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16} t}} \right)^{4/3}}{2^{4/3} S e^{-\sigma^2 t/16}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

*Der Beweis stellt eine einfache Berechnung dar und wird im Anhang A vorgelegt.*

Wir setzen die Ergebnisse aus Lemma 4.2.1 und der Transformation (4.56) in (4.53) ein und kommen zu folgender Darstellung von  $v(S, t)$

$$v(S, t) = \frac{a_2}{a} \left( \ln S - \frac{\sigma^2}{8} t - \frac{\alpha_+^{\frac{4}{3}} + \alpha_-^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} S e^{-\frac{\sigma^2}{8} t}} - 4 \ln \left( \alpha_+^{\frac{1}{3}} - \alpha_-^{\frac{1}{3}} \right) + \tilde{c} \right), \quad (4.60)$$

wobei  $\alpha_+$  und  $\alpha_-$  nach Formeln (4.57), (4.58) berechnet sind und  $\tilde{c}$  eine beliebige Konstante ist. Nach dem Einsetzen (4.60) unter Berücksichtigung von (4.6) in (4.3) gilt folgendes Theorem.

**Theorem 4.2.1** *Die Funktion  $u(S, t)$*

$$\begin{aligned} u(S, t) = & \frac{S}{\rho} \left( \ln S - \frac{\sigma^2 t}{8} \right. \\ & - \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{3/2}})^{\frac{4}{3}} + (-m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} S e^{-t\sigma^2/8}} \\ & - \ln \left( (m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{\frac{1}{3}} - (-m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\ & \left. + S d_1 + d_2, \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

mit dem Parameter  $m \neq 0$  und beliebigen Konstanten  $d_1, d_2$  stellt eine invariante dreiparametrische Lösungsfamilie der nichtlinearen Differentialgleichung (3.1) dar. Der Beweis ist im Anhang B vorgelegt.

**Bemerkung 4.2.1** *Die Gleichung (4.36) hat eine ähnliche Lösung  $u(S, t)$  wie (4.61) und diese Lösung unterscheidet sich nur im Vorzeichen unter der Wurzel der Lösung (4.61). Sie hat die Form*

$$\begin{aligned} u(S, t) = & \frac{S}{\rho} \left( \ln S - \frac{\sigma^2 t}{8} \right. \\ & - \frac{\left( m + \sqrt{m^2 - 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{3/2}} \right)^{\frac{4}{3}} + \left( -m + \sqrt{m^2 - 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} S e^{-t\sigma^2/8}} \\ & - \ln \left( \left( m + \sqrt{m^2 - 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( -m + \sqrt{m^2 - 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\ & \left. + S d_1 + d_2, \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

woraus eine zusätzliche Einschränkung für den Parameter  $m$  und die Variablen  $S$  und  $t$  folgt. Weil wir nach einer allgemeineren Form der Lösungsfamilie suchen, werden wir zunächst diese Möglichkeit nicht betrachten.



## 4.3 Eigenschaften der expliziten Lösungen

In diesem Abschnitt werden wir die asymptotischen Eigenschaften, sowie die Abhängigkeit der Lösung von den auftretenden Konstanten untersuchen. Aus der Sicht des Modells beschreibt  $\rho$  einen Einfluß der Großhändler auf die Preisbildung von Derivaten. Dieser Parameter liegt im Intervall  $(0, 1)$ . Wenn der Einfluß der Großhändler verschwindet, so geht  $\rho \rightarrow 0$  und die nichtlineare Modellgleichung (3.1) geht in die lineare Black-Scholes-Gleichung (D.5) mit  $r = 0$  über. Wenn die Lösungen einer nichtlinearen Gleichung lineare Pendanten haben im Fall, dass ein Parameter gegen Null geht, dann können wir diese lineare Pendanten direkt aus den Lösungen der nichtlinearen Gleichung erhalten. Im allgemeinen existiert aber kein Satz, der diesen Zusammenhang für nichtlineare Gleichungen garantiert.

Sei  $\rho \rightarrow 0$ , d.h. wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u(S, t).$$

Die Familie der expliziten Lösungen (4.61) hängt vom Parameter  $\rho$  in einfacher Form ab, und zwar steht in allen Lösungen der Faktor  $1/\rho$  vor dem ganzen Ausdruck. Folglich haben die Lösungen (4.61) kein lineares Pendant (d.h. Lösungen des Black-Scholes-Modells), die man mit dieser Prozedur erhalten kann. Die Lösungen (4.61) zeigen ein vollständiges “blow up” bei  $\rho \rightarrow 0$ . Dieses Verhalten ist typisch für nichtlineare parabolische Gleichungen.

### 4.3.1 Die asymptotische Entwicklung bei $S \rightarrow 0$

Wir formen die Lösung (4.61) wie folgt um,

$$\begin{aligned} u(S, t) = & \frac{S \ln S}{\rho} + \frac{S}{\rho} \left( -\frac{\sigma^2 t}{8} \right. \\ & - \ln \left( (m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{\frac{1}{3}} - (-m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\ & - \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{4/3} + (-m + \sqrt{m^2 + 4e^{-\frac{3\sigma^2 t}{16}} S^{\frac{3}{2}}})^{4/3}}{2^{\frac{4}{3}} e^{-t\sigma^2/8} \rho} \\ & + d_1 S + d_2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die asymptotische Entwicklung der Funktion (4.63) bei  $S \rightarrow 0$  lautet

$$\rho u(S, t) \approx -m^{4/3} e^{t\sigma^2/8} + d_2 \rho + S \ln S - S \left( \frac{\sigma^2 t}{8} + \ln(2m)^{4/3} - d_1 \rho \right) + O(S^{3/2}) \quad (4.64)$$

Der führende Term in dieser Entwicklung hängt von den Integrationskonstanten  $m$ ,  $d_2$  und von der Variable  $t$  ab. Somit haben wir die Möglichkeit bei den Lösungen der dreiparametrischen Familie (4.61) das Verhalten bei  $S \rightarrow 0$  zu variieren. In

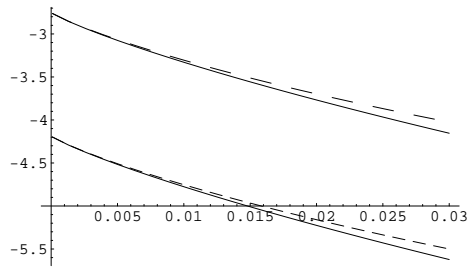


Abbildung 4.1: Die Lösungen der Gleichung (4.61) (obere und untere gestrichelte Kurven) und ihre asymptotische Entwicklung (4.64) (durchgezogene Kurve).

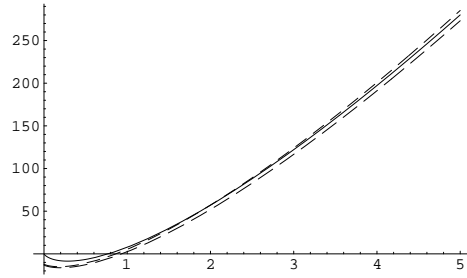


Abbildung 4.2: Das asymptotische Verhalten der Lösungen (4.61) bei  $S \rightarrow +\infty$ .

der Abbildung (4.1) sind die Lösungen mit  $m = 1.2$  (obere gestrichelte Kurve) und mit  $m = 1.3$  (untere gestrichelte Kurve) dargestellt. Die anderen Parameter sind bei beiden Lösungen gleich und lauten  $\rho = 0.1$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 10$ . Die entsprechenden Terme der asymptotischen Entwicklungen sind in der oberen und der unteren durchgezogenen Kurve in der Abbildung (4.1) dargestellt. Der Parameter  $d_2$  entspricht einer einfachen Verschiebung der Lösung insgesamt. Der Parameter  $m$  geht aber wesentlich in Formel (4.64) ein. Somit haben wir gezeigt, dass verschiedene Lösungen der Familie (4.61) in der Abhängigkeit von  $m$  unterschiedliche Werte bei  $S = 0$  bei sonst gleichen Parametern annehmen.

### 4.3.2 Die asymptotische Entwicklung der expliziten Lösungen (4.61) bei $S \rightarrow \infty$

Führen wir folgende Substitution der Variablen  $S$

$$\tilde{S} = \frac{1}{S}$$

durch und betrachten dann den Grenzwert

$$\lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} u(\tilde{S}, t).$$

Für die Funktion  $u(\tilde{S}, t)$  gilt

$$\begin{aligned} \rho u(\tilde{S}, t) = & \frac{1}{\tilde{S}} \left( \ln \frac{1}{\tilde{S}} - \frac{\sigma^2 t}{8} \right. \\ & - \frac{\left( \tilde{S}^{\frac{3}{4}} m + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} m^2 + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{4}{3}} + \left( -\tilde{S}^{\frac{3}{4}} m + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} m^2 + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} e^{\frac{-t\sigma^2}{8}}} \\ & \left. - 4 \ln \frac{\left( \tilde{S}^{\frac{3}{4}} m + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} m^2 + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( -\tilde{S}^{\frac{3}{4}} m + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} m^2 + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{1}{3}}}{\tilde{S}^{\frac{1}{4}}} \right) \\ & + \frac{d_1}{\tilde{S}} + d_2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Zerlegen wir das Argument des Logarithmus in eine Taylorreihe, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & \ln \frac{1}{\tilde{S}^{\frac{1}{4}}} \left( \left( \tilde{S}^{\frac{3}{4}} m + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} m^2 + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( -\tilde{S}^{\frac{3}{4}} m + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} m^2 + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \\ & \approx \frac{1}{2} \ln \tilde{S} + c_2 + O(\tilde{S}^{\frac{3}{2}}), \end{aligned} \quad (4.66)$$

wobei  $c_2$ ,

$$c_2 = \ln \frac{2^{1/3} m}{3 e^{-t\sigma^2/16}},$$

eine Funktion der Integrationskonstanten und der Variablen  $t$  ist. Der Term

$$\frac{\left( \tilde{S}^{\frac{3}{4}} \bar{q} \rho^{\frac{3}{4}} + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} \bar{q}^2 \rho^{\frac{3}{2}} + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{4}{3}} + \left( -\tilde{S}^{\frac{3}{4}} \bar{q} \rho^{\frac{3}{4}} + \sqrt{\tilde{S}^{\frac{3}{2}} \bar{q}^2 \rho^{\frac{3}{2}} + 4e^{\frac{-3\sigma^2 t}{16}}} \right)^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} e^{\frac{-t\sigma^2}{8}}}$$

in der Formel (4.65) geht bei  $\tilde{S} \rightarrow 0$  gegen 2. Die Funktion  $u(\tilde{S}, t)$  kann somit wie folgt dargestellt werden

$$\rho u(\tilde{S}, t) \approx -3 \frac{\ln \tilde{S}}{\tilde{S}} - \frac{1}{\tilde{S}} \left( \frac{3\sigma^2 t}{8} + 4 \ln \frac{2^{1/3} m}{3} + 2 \right) + O(\tilde{S}^{1/2}). \quad (4.67)$$

Wir erhalten für die Funktion  $u(S, t)$  bei  $S \rightarrow +\infty$

$$\rho u(S, t) \approx 3 S \ln S - S \left( \frac{3\sigma^2 t}{8} + 4 \ln \frac{2^{1/3} m}{3} + 2 \right) + O(S^{-1/2}). \quad (4.68)$$

Der führende Term der Taylorentwicklung hängt nicht von der Integrationskonstanten ab, er ist eine Funktion ausschließlich von  $\rho$ . Aus Formel (4.68) folgt, dass alle Lösungen der Familie gegen ein und denselben Wert bei  $S \rightarrow +\infty$  streben. In der Abbildung (4.2, S. 82) ist das Verhalten zweier Lösungen bei  $m = 1.22$  (untere gestrichelte Kurve) und bei  $m = 1.15$  (obere gestrichelte Kurve) im Vergleich zum führenden Term der Taylorentwicklung (durchgezogene Kurve) dargestellt. Die anderen Parameter der Lösung sind  $\rho = 0.1$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0$ .

### 4.3.3 Abhängigkeit der Lösungsfamilie von den Integrationskonstanten

Die Lösungsfamilie (4.61) hat drei verschiedene Konstanten  $m$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ , die wir geeignet wählen können um spezielle Eigenschaften der Lösungskurve zu erreichen.

Vom Standpunkt des Modells aus muss jede Lösung, die einen Derivatpreis beschreibt, immer positiv bleiben. Wir werden die Konstante  $d_2$  verwenden, um eine Lösungskurve in die obere Hälfte der  $\mathbb{R}^2$ -Ebene zu verschieben. Ferner bemerken wir, dass die Lösung  $u(S, t)$  eine gerade Funktion bezüglich des Parameters  $m$  ist, so dass wir uns auf positive Werte von  $m$  beschränken können. Für jeden fixierten Zeitpunkt  $t$  ist die Funktion  $u(S, t)$  konvex, da

$$u_{SS} := \frac{1 + 2^{\frac{5}{3}} S^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t\sigma^2}{16}}}{\rho S} > 0 \quad (4.69)$$

für alle  $S \in (0, \infty)$  gilt. Die Konstanten  $c$  und  $m$  können dazu benutzt werden, die Konvexitätseigenschaften einer Payoff-Funktion in entsprechender Weise zu modellieren.

#### Beispiel 4.3.1

*Wir betrachten zwei Portfolios.*

*Das erste bestehe aus 15 europäischen Call-Optionen mit Basispreis  $B$  und Laufzeit  $T$ . Das zweite Portfolio bilden wir mit Hilfe eines Strangles. Ein Strangle ist eine Kombination aus einer Long-Position in einer europäischen Put-Option mit einem Basispreis  $A$  und einer Long-Position in einer europäischen Call-Option mit einem Basispreis  $B$ . Die zugrundeliegende Aktie und die Laufzeit  $T$  sind gleich für Put- und Call-Optionen und es gilt die Relation  $A < B$ . Die Payoff-Funktion für Strangle mit 15 Call-Optionen und 5 Put-Optionen ist auf der Abbildung 4.3 dargestellt. Wir berechnen die Preise der beiden Portfolios nach der Black-Scholes-Formel (D.5). Die Parameter, die wir dafür benötigen, haben wir wie folgt gewählt,*

$$A = 45, \quad B = 50, \quad \sigma = 0.25, \quad T = 1, \quad r = 0.02. \quad (4.70)$$

*In den Abbildungen (4.4), (4.5) sind diese Preise jeweils mit einer stetigen Li-*

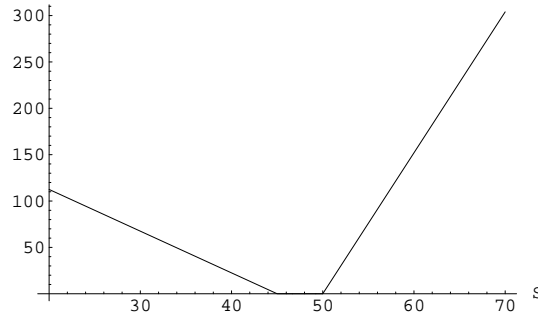


Abbildung 4.3: Eine Payoff-Funktion für ein Strangle aus 15 Call-Optionen und 5 Put-Optionen mit Parametern, die in (4.70) gegeben sind.

nie dargestellt. Wir vergleichen jetzt den Black-Scholes-Preis mit einer expliziten Funktion  $u(S, t)$  mit ein und demselben Parameter  $d_1 = 20$ . Die Konstante  $m$  wählen wir verschieden:  $m_1$  für das erste und  $m_2$  für das zweite Portfolio, um zu zeigen, wie die Lösung  $u(S, t)$  davon abhängt. In der Abbildung (4.4) stellt die gestrichelte Linie eine Lösungskurve mit  $m_1 = 120$  dar, und in der Abbildung (4.5) – mit  $m_2 = 130$ .

Man muss noch betonen, dass es notwendig ist, die Konstante  $m$  im Zusammenhang mit der Konstanten  $d_1$  zu betrachten. Ändert sich der Parameter  $d_1$ , so werden andere Werte von  $m$  benötigt, um die gleiche Lösungskurve zu erhalten. Das Beispiel zeigt, wie nahe die expliziten Lösungen (4.61) ein Strangle widerspiegeln.

## 4.4 Zusammenfassung

Im dritten Kapitel haben wir die explizite Form einer Familie von invarianten Lösungen der nichtlinearen Gleichung (3.1) gefunden. Die Familie (4.61) der expliziten Lösungen hat drei Parameter, was ein wichtiger Vorteil für die Modellierung des notwendigen Verhaltens einer Lösung in der Ebene ist.

Wir haben auch die asymptotischen Eigenschaften studiert und gezeigt, dass jede Lösung der Familie, wenn  $S$  gegen unendlich geht, gegen ein und denselben Wert

$$\rho u(S, t) \approx 3S \ln S$$

geht. Aus dieser Eigenschaft ist zu sehen, dass die Hedging-Kosten  $u(S, t)$ , die der Differentialgleichung (3.1) genügen und den Einfluss der Großhändler auf der Preisbildung von Derivaten widerspiegeln, teurer sind, als in der klassischen Preisformel von Black und Scholes und die sind gleich groß für alle Produkte, die mit

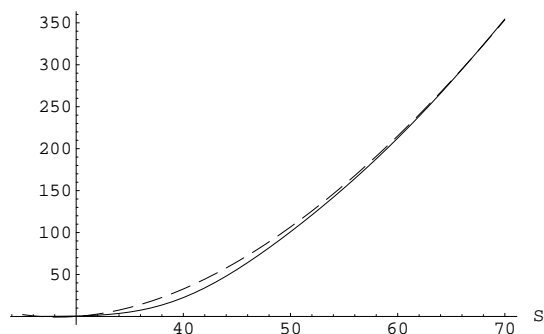


Abbildung 4.4: Der Black-Scholes-Preis für ein Portfolio von 15 Call-Optionen (durchgehende Linie) und eine explizite Lösung nach Formel (4.61) mit Parametern aus (4.70) und  $\rho = 0.1$ ,  $d_1 = 20$ ,  $d_2 = 6296.77$  (gestrichelte Linie).

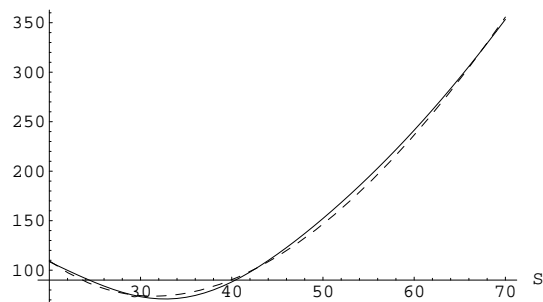


Abbildung 4.5: Der Black-Scholes-Preis für ein Portfolio aus Strangle (s. Abb. 4.3) (durchgehende Linie) und eine explizite Lösung nach Formel (4.61) mit Parametern aus (4.70) und  $\rho = 0.1$ ,  $d_1 = 20$ ,  $d_2 = 7079.79$  (gestrichelte Linie).

dieser Formel beschrieben werden können. Außerdem kann diese Eigenschaft bei der Aufstellung eines Randwertproblems für numerische Untersuchungsmethoden der nichtlinearen Gleichung nützlich sein, wie wir im Kapitel 5 zeigen werden.

## Kapitel 5

# Verifikation grundlegender numerischer Methoden auf einer Klasse expliziter Lösungen

Für eine neue nichtlineare Modellgleichung versucht man zunächst, mehrere Methoden zu nutzen, um besser die Struktur und die Eigenschaften der Lösung zu beschreiben. Jede der Methoden, ob es eine Methode der klassischen Analysis, der geometrischen Analysis oder der Numerik ist, hat ihre starke Seiten, aber auch ihre Grenzen. In den Kapiteln 3, 4 haben wir ausführlich die Symmetrieeigenschaften der Modellgleichung (3.1), sowie einige Klassen von invarianten Lösungen untersucht. Die gefundenen Klassen von Lösungen bilden im gewissen Sinne die algebro-geometrische Struktur der Gleichung ab. Aber diese Lösungen sind nur ein Teil der Lösungsmenge der Modellgleichung (3.1). Die bei uns beschriebenen Klassen von invarianten Lösungen genügen Randbedingungen, die kompatibel mit der Symmetriegruppe der Gleichung sind. Die invarianten Lösungen bilden eine sehr wichtige Klasse von Lösungen einer Gleichung. Nehmen wir die lineare Black-Scholes-Gleichung (D.5), dann gehören die gut bekannten expliziten Lösungen (D.6), (D.9) für eine europäischen Call- oder Put-Option zur Klasse der invarianten Lösungen dieser Gleichung wie in der Arbeit [30] gezeigt wurde. Viele begründen den schnellen und umfassenden Erfolg des Black-Scholes-Modells mit der Existenz dieser Lösungen. Das lineare Black-Scholes-Modell ist wegen seiner Linearität ein wesentlich einfacherer Fall für eine Untersuchung, als die vorliegende Modellgleichung (3.1). Die Linearität läßt ein Baukastenprinzip bei der Berechnung des Preises eines Derivats mit einer komplizierten Payoff-Funktion zu. Für viele Derivate ist es völlig ausreichend, nur die explizite Formel für eine europäische Call- oder Put-Option zu nutzen, um den Preis zu bestimmen.

Anders ist die Situation in einem nichtlinearen Fall. Für jede Randbedingung muss die Gleichung vom neuem gelöst werden (siehe Abb. 5.17). Sind aber die

Randbedingungen nicht kompatibel mit der Symmetriegruppe, so haben wir keine invarianten Lösungen zu erwarten. Für die Anwendungen sind aber verschiedene Randbedingungen interessant. Hier stoßen wir an die Grenze dieser Methode. Wenn wir uns nun den Methoden der klassischen Analysis zuwenden, um möglichst allgemeine Klassen von Lösungen zu beschreiben, so müssen wir die Eigenschaften des Differentialoperators, der der Modellgleichung (3.1) entspricht, eingehend untersuchen. Eine Untersuchung des Differentialoperators im stark nichtlinearen Fall, wie hier, ist sehr schwierig und nicht algorithmisch. Gute Ergebnisse hat man bis jetzt nur für einige ausgewählte Klassen von nichtlinearen Gleichungen erreicht, z.B. für quasilineare Gleichungen oder für vollständig integrierbare Systeme. Eine Prozedur zur Beschreibung aller wichtigsten Klassen der Lösungen für eine Gleichung der Art (3.1) ist noch nicht entwickelt.

Eine weitere Möglichkeit, eine Lösung für bestimmte Randbedingungen zu finden, bieten numerischen Methoden. Dieser auf den ersten Blick natürliche Schritt birgt jedoch große Risiken in sich. Solange die Eigenschaften des Differentialoperators, welcher der nichtlinearen Gleichung entspricht, nicht vollständig untersucht sind, kann man auch keine effektiven numerischen Schemata entwickeln. Numerische Methoden für eine lineare parabolische Gleichung sind wohlbekannt und sehr detailliert untersucht, während die Theorie für nichtlineare Gleichungen ein sich aktiv entwickelndes Gebiet ist. Für die Gleichungen der Art (3.1) sind bis jetzt keine theoretischen Arbeiten bekannt, woraus folgen könnte, wie man die numerische Prozedur zu gestalten hat, um die Konvergenz und gute Effizienz des Verfahrens zu erreichen. In vielen Arbeiten [20], [21], [40] versucht man trotz dieser Schwierigkeiten, neue nichtlineare Modelle mit numerischen Methoden zu untersuchen, obwohl die theoretischen Grundlagen noch fehlen. Man startet mit einer der grundlegenden numerischen Methoden, welche sich für andere Aufgaben als relevant erwiesen hat, und versucht für eine endliche Anzahl der Randbedingungen die Parameter des numerischen Schemas so zu verändern, dass die Lösungen glaubwürdig erscheinen [12]. Um sicher zu gehen, dass das gewählte numerische Schema gute Ergebnisse liefert, betrachtet man das Verhalten der numerischen Lösungen in Abhängigkeit von Parametern oder man nutzt eine Referenzlösung (Testlösung) zum Vergleich. Solche Referenzlösungen erhält man, wenn man z.B. ein wesentlich feineres Gitter bei den Berechnungen nimmt. Falls für die gegebene Gleichung eine explizite Lösung existiert, so nutzt man sie als eine Referenzlösung, um numerische Schemata auf dieser Lösung zu verifizieren. Solche Verifikationsmethoden ersetzen keine Untersuchung der Eigenschaften des Operators, aber sie erlauben es, ein besseres Verständnis der Eigenschaften der Gleichung zu erreichen. Insbesondere die Verifikation des numerischen Schemas auf einer Klasse von expliziten Lösungen kann sehr nützlich sein, weil diese Lösungen gleichungsspezifisch sind im Vergleich zur Verifikation auf verschiedenen Gittern, die keine Struktur der Gleichung abbilden. Wenn die Struktureigenschaften einer Gleichung gut untersucht sind, nutzt



man sie, um ein angepasstes anstatt eines äquidistanten Gitters zu verwenden. Das Hauptproblem bei der Benutzung von expliziten Lösungen als Referenzlösungen ist die Tatsache, dass für viele nichtlineare Gleichungen kaum nichttriviale explizite Lösungen bekannt sind [66]. In unserem Fall können wir den glücklichen Umstand, dass explizite Lösungen (4.61) bekannt sind, nutzen und zur Verifikation der numerischen Methoden als Referenzlösungen nehmen.

Wir werden zwei klassische numerische Verfahren für das nichtlineare Problem (3.1) untersuchen - die explizite und die vollständig implizite Methode. Wenn sich die Anwendung der expliziten Methode im linearen und nichtlinearen Fall wenig unterscheidet, so erhalten wir im impliziten Fall statt eines linearen Systems von Gleichungen ein nichtlineares System, welches wir in jedem Schritt untersuchen müssen, um die Werte der Lösung in den Gitterpunkten der folgenden Zeitschicht zu bestimmen. Die Lösung eines großen nichtlinearen Systems ist sehr Zeit und Ressourcen aufwendig, abgesehen davon, dass ein solches System mehrere oder keine Lösungen besitzen kann. Deswegen versucht man diese Schwierigkeiten zu umgehen und das System mindestens teilweise zu linearisieren. Falls die nichtlineare Gleichung der Art

$$F(S, t, u, u_S, u_{SS}) + u_t = 0$$

dies zulässt, versucht man den nichtlinearen Teil der Gleichung als eine Summe oder ein Produkt der Art

$$u_{SS} + \tilde{F}(S, t, u, u_S, u_{SS}), \quad u_{SS} \tilde{F}(S, t, u, u_S, u_{SS})$$

darzustellen. Man kann dann die nichtlinearen Terme auf dem vorhergehenden Zeitschritt fixieren und weiter ein implizites Verfahren nutzen. Man ist dabei nicht mehr gezwungen, in jedem Schritt ein nichtlineares System zu lösen. Dieses Verfahren spart Zeit und Ressourcen und wird recht oft benutzt.

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten numerischen Verfahren anhand von den Lösungen (4.61) überprüfen, um praktische Empfehlungen zur Nutzung dieser Verfahren auszuarbeiten, die zur numerischen Lösung der Gleichung (3.1) unter anderen Anfangs- und Randbedingungen benutzt werden können.

## 5.1 Das explizite Verfahren

### 5.1.1 Wichtige Begriffe und Bezeichnungen

Eine lineare parabolische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich auf die klassische Wärmeleitungsgleichung (“Diffusionsgleichung”)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \tag{5.1}$$

zurückführen. Diese Gleichung zusammen mit der Anfangsbedingung  $u(S, 0) = u_0(S)$  ist eine korrekt gestellte Aufgabe [5] für  $t > t_0 = 0$ . Seitdem Black und Scholes ihre Arbeit im Jahr 1973 veröffentlicht haben, wurde in der Literatur häufig eine Aufgabe der Art

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{S^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = 0 \quad (5.2)$$

untersucht, welche zusammen mit der Endbedingung  $u(S, T) = u_T(S)$  für  $t < T$  eine korrekt gestellte Aufgabe dargestellt. Das klassische Finite-Differenzen-Verfahren ist in zahlreichen Büchern (siehe u.a. [15], [31], [55], [72]) für beide oben genannte Formen der Gleichung, (5.1) und (5.2), dargestellt. Wir geben in diesem Abschnitt die wichtigsten Begriffe und Definitionen für das explizite Verfahren unter Berücksichtigung von einer “rückwärts” gestellten Aufgabe mit einer Endbedingung an.

Wir werden annehmen, dass die unabhängigen Variablen  $S$ ,  $t$  im Bereich

$$(S, t) \in (S_0, S_{\max}) \times [t_0, T)$$

liegen. Für die Realisierung des Differenzenverfahrens werden wir ein äquidistantes Gitter wählen. Dafür geben wir uns zwei natürliche Zahlen  $N_S$  und  $N_t$  vor und definieren die Schrittweiten bezüglich der Zeit- und Ortsvariablen,  $t$  bzw.  $S$

$$\tau = \frac{T - t_0}{N_t}, \quad h = \frac{S_{\max} - S_0}{N_S}. \quad (5.3)$$

Desweiteren werden die Bezeichnungen der Gitterpunkte  $(S_i, t_j)$

$$S_i = S_0 + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, \dots, N_S + 1, \quad (5.4)$$

$$t_j = t_0 + (j - 1)\tau, \quad j = 1, 2, \dots, N_t + 1 \quad (5.5)$$

eingeführt. Eine numerische Lösung in den Gitterpunkten  $(S_i, t_j)$  bezeichnen wir mit  $w_{i,j}$  und den entsprechenden Fehler mit  $\varepsilon_{i,j} = u(S_i, t_j) - w_{i,j}$ , wobei  $u(S_i, t_j)$  die Funktionswerte der exakten Lösung in den Gitterpunkten sind.

Für die zweite partielle Ableitung  $\partial^2 u / \partial S^2$  an der Stelle  $(S_i, t_j)$  verwenden wir die symmetrische Differenz, d.h.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S_i, t_j) \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2}. \quad (5.6)$$

Für die Diskretisierung der partiellen Ableitung nach  $t$  werden wir eine Rückwärts- und Vorwärtsdifferenz benutzen. Im Falle einer Aufgabe mit einer Endbedingung wird die Rückwärtsdifferenz

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S_i, t_j) \approx \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\tau} \quad (5.7)$$

zu einem expliziten Verfahren führen. Das Ausnutzen der Vorwärtsdifferenz

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S_i, t_j) \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\tau} \quad (5.8)$$

bei der Lösung derselben Aufgabe wird zu einem impliziten Verfahren führen.

**Bemerkung 5.1.1** *Bei einer rückwärts gestellten Aufgabe sind die Werte auf der Zeitschicht  $j + 1$  bekannt und die entsprechenden Werte auf der Schicht  $j$  sind zu berechnen.*

Wir bezeichnen eine  $K$ -Norm einer diskreten Funktion auf einer Zeitschicht  $j$  durch  $\|\varepsilon_j\|_K$ , entsprechend dem gewählten Raum  $K$ . Die meist verwendeten Normen in der numerischen Mathematik sind die diskrete  $L_2$ -Norm und die  $C$ -Norm, welche wie folgt

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_j\|_C &= \max_{1 \leq i \leq N_S+1} |\varepsilon_{ij}|, \\ \|\varepsilon_j\|_{L_2} &= (h \sum_{i=1}^{N_S+1} |\varepsilon_{ij}|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

definiert sind. Desweiteren geben wir eine der am häufigsten verwendeten Definitionen eines stabilen numerischen Schemas an [1, 51, 72, u.a.].

**Definition 5.1.1** *Das Differenzenschema heißt stabil bezüglich der Endbedingungen, wenn für ein beliebiges  $\epsilon > 0$  ein solches  $\delta > 0$  existiert, dass*

$$\|\varepsilon_{N_t+1}\|_K < \delta \Rightarrow \|\varepsilon_j\|_K < \epsilon, \quad 1 \leq j \leq N_t \quad (5.9)$$

*gilt, wobei  $\|\varepsilon_{N_t+1}\|_K$  der Fehler auf der Schicht  $j = N_t + 1$  ist und  $K$  den entsprechenden Raum ( $C$  oder  $L_2$ ) bezeichnet.*

Diese Definition ist äquivalent zur Existenz einer Konstanten  $M$  (unabhängig von  $j$ ), so dass

$$\|\varepsilon_j\|_K < M \|\varepsilon_{N_t+1}\|_K$$

für alle  $j = 1, \dots, N_t$  gilt.

### 5.1.2 Ein Beispiel der expliziten Differenzenmethode für eine lineare partielle parabolische Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten

Im diesen Abschnitt betrachten wir eine lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten, welche entsteht, wenn wir in der zu untersuchenden nichtlinearen

Gleichung (3.1) den Parameter  $\rho$  gleich Null setzen

$$u_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} u_{SS} = 0, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} u(S, T) &= u_T(S), & S &\in (S_0, S_{\max}), \\ u(S_0, t) &= u_0(t), & t &\in [0, T), \\ u(S_{\max}, t) &= u_1(t), & t &\in [0, T). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wir haben in Kapitel 4 gezeigt, dass die Lösungen (4.61) ein komplettes “blow up” erleiden, wenn  $\rho \rightarrow 0$  geht. Wir werden aber die Funktionen (4.61), die nun keine Lösungen des Problems (5.10)-(5.11) darstellen, bei einem fixierten  $\rho = \rho_0$  benutzen und mit  $u^*(S, t)$  bezeichnen. Wir wählen als End- und Randbedingungen für die Aufgabe (5.10)-(5.11) die Werte der Funktion  $u^*(S, t)$  bei  $S = S_0, S_{\max}$  und  $t = T$ . Somit sind die Kompatibilitätsbedingungen in den Endpunkten des Gebietes

$$u_T(S_0) = u_0(T) = u^*(S_0, T), \quad u_T(S_{\max}) = u_1(T) = u^*(S_{\max}, T)$$

auf triviale Weise erfüllt.

Wir bilden eine Differenzengleichung, die der expliziten Differenzmethode entspricht, indem wir die Differenzenquotienten (5.6) bzw. (5.7) in die Gleichung (5.10) einsetzen

$$w_{i,j-1} = a_{i-1}w_{i-1,j} + a_i w_{i,j} + a_{i+1}w_{i+1,j}, \quad (5.12)$$

wobei die Koeffizienten  $a_{i-k}$ ,  $k = -1, 0, 1$ , wie folgt

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= a_{i+1} = \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{\tau}{h^2}, \\ a_i &= 1 - \sigma^2 S_i^2 \frac{\tau}{h^2} \end{aligned}$$

definiert sind. Im Buch [22] sind die Bedingungen angegeben, unter welchen die Differenzengleichungen mit variablen Koeffizienten, analog zu (5.12), stabil sind.

**Lemma 5.1.1** *Sind alle Koeffizienten  $a_i$ ,  $a_{i-1}$ ,  $a_{i+1}$  für jedes  $i$ ,  $i = 1, \dots, N_S + 1$ , positiv, wenn  $\tau$  und  $h$  gegen Null gehen, und gilt die Gleichung*

$$a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 1, \quad i = 1, \dots, N_S + 1, \quad (5.13)$$

*so ist das Differenzenschema (5.12) stabil.*

Diese Behauptung wird für lineare Differenzenoperatoren in allgemeiner Form (s. [22, S. 108-112]) bewiesen. In unserem Fall (5.12) ist die Bedingung (5.13) erfüllt. Aus der Bedingung, dass die Koeffizienten  $a_{i-k}$  positiv sein sollen, folgt

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{\sigma^2 S_i^2}.$$

Diese Ungleichung muss für jedes  $i = 1, \dots, N_S + 1$  erfüllt werden. Somit können wir  $S_i$  durch den maximalen Wert  $S_{\max}$  ersetzen und die folgende Stabilitätsbedingung für das Schema (5.12) finden

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{\sigma^2 S_{\max}^2}. \quad (5.14)$$

Das nachfolgende Beispiel zeigt, welchen Einfluß die Größe des Variablenbereiches  $S$  auf die Relation zwischen  $\tau$  und  $h^2$  hat.

### Beispiel 5.1.1

Seien  $T = 1.0$  und  $\sigma = 0.35$ . Wir werden verschiedene Werte von  $S_{\max}$  betrachten und damit verschiedene Bedingungen für die Stabilität der numerischen Lösung der Gleichung (5.10) erhalten. Es seien  $S_{\max} = 2.0$ ,  $S_0 = 0.05$  und  $h = 0.05$  fixiert. Bezeichnen wir

$$k = \frac{\tau}{h^2},$$

dann ist  $\tau$  so zu wählen, dass die Ungleichung  $k \leq 2.04$  erfüllt wird. In der Abbil-

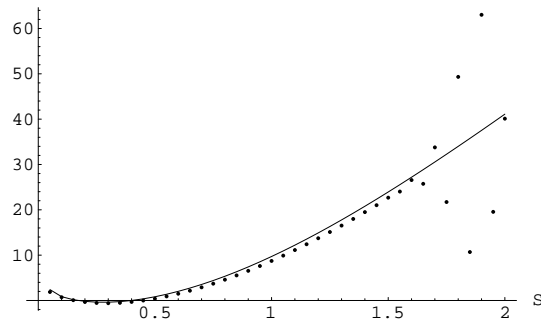


Abbildung 5.1: Die durchgezogene Linie zeigt die konvergente numerische Lösung mit  $k = 2.0$ , die gepunktete Linie stellt die divergente numerische Lösung bei  $k = 3.0$  dar.

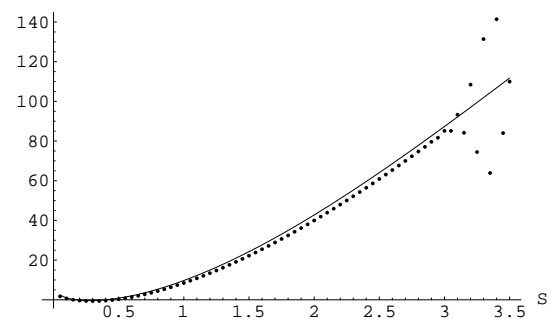


Abbildung 5.2: Die durchgezogene Linie ist die konvergente numerische Lösung mit  $k = 0.5$ , die gepunktete Linie zeigt die divergente numerische Lösung bei  $k = 1.0$ .

Abbildung 5.1 ist die Lösung unter Einhaltung der Stabilitätsbedingung (5.14)  $\tau = 2.0 h^2$  (durchgezogene Linie) dargestellt. Die gepunktete Linie stellt den instabilen Fall der Lösung mit der Relation  $\tau = 3.0 h^2$  dar.

Sei  $S_{\max} = 3.5$ . Die zur Stabilität notwendige Relation zwischen den Schritten ist gleich 0.67. Die Abbildung 5.2 stellt die Ergebnisse des numerischen Verfahrens für  $k = 0.5$  bzw  $k = 1.0$  dar. Die Parameter für die Lösung  $u^*(S, t)$  wurden als  $\rho = \rho_0 = 0.1$ ,  $m = 3.13$ ,  $d_1 = 15.3$ ,  $d_2 = 50$  gewählt.

Es ist zu betonen, dass mit dem wachsenden Bereich der  $S$ -Variablen die Größe  $1/\sigma^2 S_{\max}^2$  immer kleiner wird. Die Anzahl der Zeitschritte wird wegen der Stabi-

litätsbedingung (5.14) ungünstig wachsen. Damit steigen auch die benötigte Rechnerzeit und die kumulierenden Fehler.

### 5.1.3 Die explizite Differenzenmethode für die nichtlineare Modellgleichung

Nichtlineare Gleichungen sind besonders schwer numerisch zu analysieren. Sie erfordern wesentlich größeren Aufwand an Zeit und Anstrengungen als die linearen Gleichungen. Die Technik zur Bildung eines numerischen Verfahrens wird oft vom linearen Fall übertragen. Die Idee, die Ableitungen in der Differentialgleichung durch Differenzenquotienten zu ersetzen, führt, wie auch bei einer linearen Aufgabe, zu einer Differenzengleichung. Die Fragen der Stabilität und der Konvergenz dagegen sind komplizierter und in vielen Fällen nicht eingehend untersucht. Für ein nichtlineares Problem wird vermutlich die Stabilität nicht nur von der Form der finiten Differenzenmethode abhängen, sondern auch allgemein von den End- und Randbedingungen und vom Typ der Nichtlinearität.

Wir betrachten die Modellgleichung

$$u_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{u_{SS}}{(1 - \rho S u_{SS})^2} = 0. \quad (5.15)$$

Aus dem Kapitel 4 kennen wir die explizite Darstellung der Familie der Lösungen der Differentialgleichung (5.15)

$$u^*(S, t) = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}(S, t), \quad (5.16)$$

wobei  $\mathbf{u}(S, t)$  eine von  $\rho$  unabhängige Funktion ist, die aus (4.61) bestimmt werden kann. Setzen wir die Lösung in der Form (5.16) in die Gleichung (5.15) ein, so erhalten wir, dass die Funktion  $\mathbf{u}(S, t)$  folgender Differentialgleichung genügt

$$\mathbf{u}_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\mathbf{u}_{SS}}{(1 - S \mathbf{u}_{SS})^2} = 0. \quad (5.17)$$

Aus diesem Grund können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass wir eine Gleichung (5.15) mit  $\rho = 1$  betrachten, solange wir bei den expliziten Lösungen bleiben. Diese Voraussetzung gilt aber nur in dem Fall, wenn wir als End- und Randbedingungen für numerische Verfahren die gefundene explizite Lösung (4.61) nehmen und die Symmetrie der Gleichung (5.15) nutzen. Für andere Randbedingungen können wir den Parameter  $\rho$  nicht eliminieren. Im linearen Fall könnten wir ohne weiteres eine elementare Skalierung der gesuchten Funktion durchführen. Im nichtlinearen Fall ist der Übergang von der Gleichung (5.15) zu der Gleichung (5.17) nur für die Form der Lösungsfamilien (4.61) möglich.

Um die Stabilität der numerischen Methoden für einen nichtlinearen Fall untersuchen zu können, wird oft die “Linearisierung” einer nichtlinearen Gleichung durchgeführt. Dann werden bekannte Ergebnisse aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen ähnlich wie im Abschnitt 5.1.2 verwendet. Im Buch [1] ist eine der Linearisierungsmöglichkeiten für eine allgemeine nichtlineare Differentialgleichung der Art

$$u_t + F(t, S, u, u_S, u_{SS}) = 0 \quad (5.18)$$

dargestellt, wobei  $F$  eine glatte Funktion ihrer Variablen ist. In unserem Fall (5.17) sieht die Funktion  $F$  wie folgt aus

$$F(S, u_{SS}) = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{u_{SS}}{(1 - Su_{SS})^2} \quad (5.19)$$

und hängt nur von  $S$  und  $u_{SS}$  ab. Somit ist  $F(t, S, u, u_S, u_{SS}) = F(S, u_{SS})$ . Ähnlich wie vorher führen wir ein äquidistantes Gitter mit den Schrittweiten  $h$  bzw.  $\tau$  ein. Man verwendet für die zweite Ableitung den zentralen Differenzenquotienten (5.6) und für die erste Ableitung bezüglich  $t$  einen Rückwärtsquotienten (5.7). Setzen wir (5.6), (5.7) in die Gleichung (5.15) ein, so erhalten wir

$$u(S_i, t_{j-1}) = u(S_i, t_j) - \tau F \left( S_i, \frac{u(S_{i-1}, t_j) - 2u(S_i, t_j) + u(S_{i+1}, t_j)}{h^2} \right) + O(\tau^2 + \tau h^2). \quad (5.20)$$

Für die Approximationswerte  $w_{i,j}$  gilt folglich die Gleichung

$$w_{i,j-1} = w_{i,j} - \tau F \left( S_i, \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} \right). \quad (5.21)$$

Wir betrachten die Differenz zwischen beiden Gleichungen (5.20) und (5.21). Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\begin{aligned} & F \left( S_i, \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} \right) - F \left( S_i, \frac{u(S_{i-1}, t_j) - 2u(S_i, t_j) + u(S_{i+1}, t_j)}{h^2} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u_{SS}}(S_\xi, t_\xi) \left( \frac{\varepsilon_{i-1,j} - 2\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i+1,j}}{h^2} \right), \end{aligned}$$

wobei  $(S_\xi, t_\xi)$  ein Mittelpunkt zwischen einem exakten Wert  $u(S_i, t_j)$  und einem mit der numerischen Methode bestimmten Wert  $w_{i,j}$  ist. Der Fehler  $\varepsilon_{ij} = u(S_i, t_j) - w_{i,j}$  genügt der Differenzengleichung

$$\varepsilon_{i,j-1} = \varepsilon_{i,j} \left( 1 + 2 \frac{\tau}{h^2} \frac{\partial F}{\partial u_{SS}}(S_\xi, t_\xi) \right) - \frac{\tau}{h^2} \frac{\partial F}{\partial u_{SS}}(S_\xi, t_\xi) (\varepsilon_{i-1,j} + \varepsilon_{i+1,j}). \quad (5.22)$$

Diese Differenzengleichung ist linear und wir können die Ergebnisse aus Kapitel (5.1.2) benutzen. Aus Lemma (5.1.1) folgt die Stabilitätsbedingung für das Schema (5.22).

Um die Stabilität des numerischen Schemas zu erreichen, soll die Relation zwischen  $\tau$  und  $h$  so gewählt werden, dass die Koeffizienten in (5.22) für alle  $(S, t)$  positiv bleiben, d. h.

$$-\frac{\tau}{h^2} \frac{\partial F}{\partial u_{SS}} > 0, \quad (5.23)$$

$$1 + 2\frac{\tau}{h^2} \frac{\partial F}{\partial u_{SS}} > 0. \quad (5.24)$$

**Lemma 5.1.2** *Für jeden Punkt  $(S, t)$  im Definitionsbereich gilt*

$$\frac{\partial F}{\partial u_{SS}} = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{1 + Su_{SS}}{(1 - Su_{SS})^3} < 0,$$

wobei die Funktion  $F(S, u_{SS})$  nach der Formel (5.19) bestimmt ist. Der Beweis ist im Anhang C ausgeführt.

Nach dem Lemma 5.1.2 ist die erste Ungleichung (5.23) für beliebige  $\tau, h$  erfüllt. Aus der zweiten Ungleichung (5.24) folgt die Relation zwischen Orts- und Zeitschrittweiten

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \mathcal{K}(S, t), \text{ wobei } \mathcal{K}(S, t) := \left| \frac{(1 - Su_{SS})^3}{1 + Su_{SS}} \right| \frac{1}{\sigma^2 S^2}. \quad (5.25)$$

Wenn man das Verhalten der Lösung  $u(S, t)$  der Gleichung nicht kennt, kann man dieses Kriterium kaum praktisch nutzen. Wir haben aber eine Klasse von expliziten Lösungen (4.61) gefunden und können mindestens auf dieser Klasse der Lösungen die durch dieses Kriterium auferlegten Beschränkungen studieren. Sei nun  $u(S, t)$  eine der Lösungen aus der Familie (4.61), dann ist die Funktion  $\mathcal{K}(S, t)$  bezüglich der Variablen  $t$  streng monoton fallend. Somit können wir im weiteren immer  $t = T$  nehmen. Die Funktion  $\mathcal{K}(S, t)$  steigt bezüglich der Variable  $S$  im Intervall  $S = [0, 1.7154)$  und fällt im Intervall  $S = (1.7154, \infty)$  (Abb. 5.1.3). Wenn  $S$  gegen unendlich geht, nähert sich diese Funktion  $\mathcal{K}(S, t)$  asymptotisch der Null. Weil die Ungleichung (5.25) für alle Werte  $(S, t)$  im Definitionsbereich gelten soll, nehmen wir

$$\frac{\tau}{h^2} \leq m := \min_{S \in [S_0, S_{\max}]} \mathcal{K}(S, T).$$

Wir führen ein Beispiel an.

### Beispiel 5.1.2

*Wir betrachten ein Intervall  $S = [40, 140]$ . Diese Werte von  $S$  entsprechen den realistischen Aktienpreisen auf dem Markt. In dem Fall erreicht die Funktion  $\mathcal{K}$*



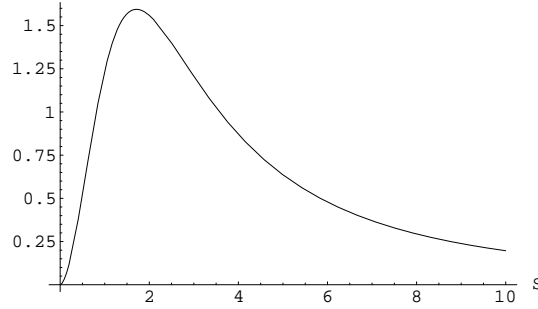


Abbildung 5.3: Die Funktion  $\mathcal{K}(S, t)$  auf dem Intervall  $S = [0, 10]$ .

ein Minimum  $m$  bei  $t = T$  im Punkt  $S = 140$ , der Wert  $m = 0.001115$  ist. Das bedeutet, dass die folgende Ungleichung

$$\tau \leq 0.001115 h^2$$

gelten muss.

Es ist schon an dieser Stelle klar, dass die Stabilitätsbedingung (5.25) sehr kleine Zeitschrittweiten  $\tau$  verlangt. Das ist in Fällen mit  $S \gg 1$  sehr ungünstig. Unser Vorteil ist, dass wir eine Familie von expliziten Lösungen der Differentialgleichung (5.15) erhalten haben und jedes Mal die Funktion  $\mathcal{K}(S, t)$  berechnen können. In anderen Fällen bringt die Abhängigkeit der Ungleichung (5.25) von der Variablen  $S$  als auch von der Struktur der Nichtlinearität der Gleichung (5.15) einen wesentlichen Nachteil mit sich.

#### 5.1.4 Ergebnisse der numerischen Berechnungen im nicht-linearen Fall

##### Die nichtlineare Modellgleichung mit variablen Koeffizienten

In diesem Teil versuchen wir die Stabilitätsbereiche des expliziten Verfahrens für die nichtlineare Gleichung (5.15) numerisch zu studieren. Wir werden die Symmetrieeigenschaft (3.63) benutzen und die Konstante  $\lambda$  in entsprechender Weise wählen, um das Intervall der Variable  $S$  auf  $S \in (0, 2]$  zu transformieren. Wir wählen z.B.  $\lambda = S_{\max}/2$  und betrachten eine neue Variable  $\tilde{S} = S/\lambda$ .

Im Bereich  $(0, 2] \times [0, T]$  betrachten wir ein äquidistantes Gitter mit den Schrittweiten  $h$  bzw  $\tau$ . Wegen der Singularität der expliziten Lösungen (4.61) im Punkt  $S = 0$  wählen wir  $S_0$  klein, aber ungleich Null. Wir ersetzen die Ableitungen in der Gleichung (5.15) durch die Differenzen nach den Formeln (5.6) und (5.7), somit

erhalten wir folgende Differenzengleichung

$$w_{i,j-1} = w_{i,j} + \frac{\sigma^2 \tau}{2h^2} \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\left( \frac{1}{S_i} - \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} \right)^2}, \quad (5.26)$$

$$i = \overline{1, N_s + 1}, \quad j = \overline{1, N_t + 1}$$

mit End- und Randbedingungen

$$w_{i,N_t+1} = u^*(S_i, T), \quad w_{1,j} = u^*(S_1, t_j), \quad w_{N_s+1,j} = u^*(S_{N_s+1}, t_j). \quad (5.27)$$

Die hier dargestellten Berechnungen wurden mit den Parametern

$$S = [0.05, 2], \quad \sigma = 0.349, \quad T = 0.25 \quad (5.28)$$

durchgeführt, wobei für die explizite Lösung  $u^*(S, t)$  die Parameter  $m = 3.13$ ,  $d_1 = 1.53$ ,  $d_2 = 0$  gewählt wurden. Wir legen den Schritt  $h$  fest und wählen  $\tau = kh^2$ . Aus dem linearen Fall wissen wir, dass bei  $k \leq 1/2$  die explizite Methode stabil ist. Wir werden hier  $k$  im Intervall  $(0, 1)$  wählen. Somit haben wir die Möglichkeit, eine Approximationslösung auf verschiedenen Gittern zu untersuchen. Aus der Stabilitätsbedingung (5.25) und den Eigenschaften der Funktion  $\mathcal{K}(S, t)$  muss die Konstante  $k$  wie folgt gewählt werden

$$\begin{aligned} S = [0.5, 2] & : \quad k = \min \mathcal{K}(S, t) = \mathcal{K}(0.5, T) \approx 0.53; \\ S = [0.05, 2] & : \quad k = \min \mathcal{K}(S, t) = \mathcal{K}(0.05, T) \approx 0.012; \\ S = [0.01, 2] & : \quad k = \min \mathcal{K}(S, t) = \mathcal{K}(0.01, T) \approx 0.00093; \\ S = [0.005, 2] & : \quad k = \min \mathcal{K}(S, t) = \mathcal{K}(0.005, T) \approx 0.00032. \end{aligned}$$

Für die Berechnungen wurde das Programmpaket MATHEMATICA 5.0 benutzt. Vom Standpunkt der Implementierung sind klassische numerische Methoden hier einfach. Für diese Methode braucht man keinen großen Aufwand von Programmtools und sie können elementar in MATHEMATICA 5.0 hergeleitet werden. Außerdem bietet MATHEMATICA 5.0 die Möglichkeit, Gleitpunktzahlen mit einer beliebigen Anzahl von Ziffern darzustellen. Unter der *Präzision* einer Gleitpunktzahl versteht man die Anzahl ihrer Dezimalziffern, die in den Berechnungen als signifikant angesehen werden [77]. Die unterschiedlichen Berechnungsarten können zum Verlust der Präzision von Ergebnissen führen. Ein klassisches Beispiel ist die Subtraktion zweier eng benachbarter Zahlen [77]. Das Ergebnis hängt von den Ziffern in den Dezimalstellen höherer Ordnung jeder Zahl ab und hat in der Regel weniger präzise Stellen als die ursprünglichen Zahlen. Im Fall des expliziten Verfahrens (5.26) haben wir eine Subtraktion als auch eine Division von kleinen Zahlen - die Berechnungsarten, die sehr stark die Präzision verringern können. Außerdem

verlangt auch die große Anzahl der Zeitschritte eine höhere Präzision. Wir haben alle Eingabewerte der Variablen mit Anfangspräzision  $p = 500$  ausgeführt. Die Algorithmen, die MATHEMATICA benutzt, sind so konstruiert, dass so viel Präzision wie möglich erhalten bleibt und das Programm nur zuverlässig berechnete Ziffern zurückgibt.

h	0.05		0.025	
k	Verlust d. Genauigkeit (St.)	Anzahl d. Zeitschritte	Verlust d. Genauigkeit (St.)	Anzahl d. Zeitschritte
0.2	60	500	200	2000
0.02	60	5000	200	20000
0.01	60	10000	300	40000
0.005	80	20000	-	80000

Tabelle 5.1: Verlust der Genauigkeit (in Stellen) und die Anzahl der Zeitschritte bei der Berechnung mit dem expliziten Verfahren (5.26) für die verschiedenen Gitter.

In der Tabelle 5.1 ist als erstes der Verlust der Genauigkeit (gemessen mit Hilfe der in MATHEMATICA 5.0 eingebauten Funktion *“Precision”*) für zwei Größen  $h = 0.05$  und  $h = 0.025$  bei verschiedenen Werten der Relationskoeffizienten  $k$  dargestellt. Bei der Verringerung des Schrittes  $h$  fällt die Genauigkeit sehr schnell ab, was eine sehr große Anfangspräzision verlangt. Außerdem wächst die Anzahl der Schritte in Zeitrichtung (s. Tabelle 5.1), wenn der Relationskoeffizient  $k$  immer kleiner wird. Das führt seinerseits zum Wachstum des Rundungsfehlers und damit wieder zum Verlust an sicheren Stellen. Bessere Ergebnisse wurden mit  $h = 0.05$ ,

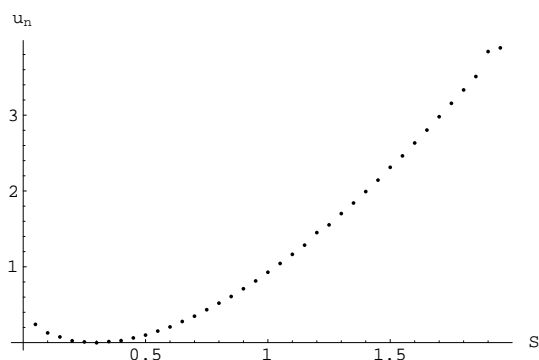


Abbildung 5.4: Die numerische Lösung der Gleichung (5.26), welche die exakte Lösung (4.61) approximiert;  $h = 0.05$ ,  $k = 0.005$ ,  $N_S = 40$ ,  $N_t = 20000$ .

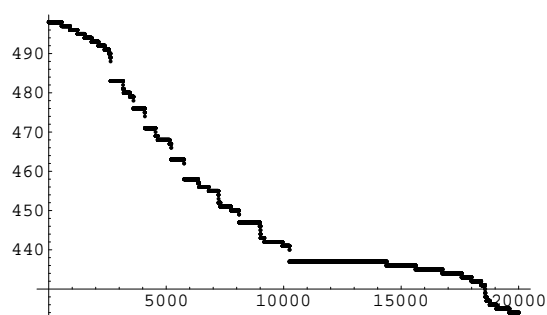


Abbildung 5.5: An der vertikalen Achse wird die minimale Anzahl der sicheren Stellen nach dem Komma bei der Berechnung auf dem entsprechenden Zeitschritt (horizontale Achse) angegeben.

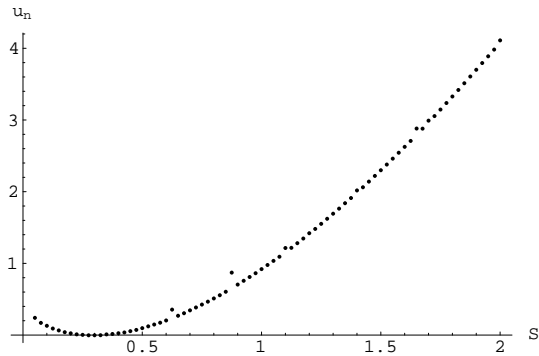


Abbildung 5.6: Die numerische Lösung der Gleichung (5.26), welche die exakte Lösung (4.61) approximiert;  $h = 0.025$ ,  $k = 0.02$ ,  $N_S = 79$ ,  $N_t = 20000$ .

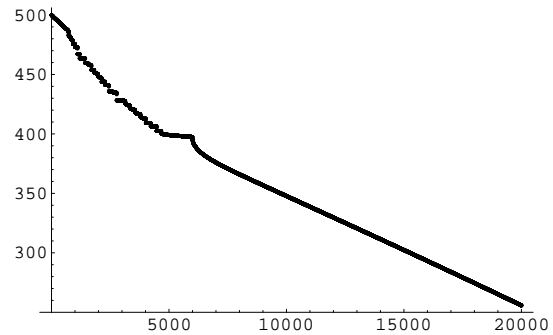


Abbildung 5.7: An der vertikalen Achse wird die minimale Anzahl der sicheren Stellen nach dem Komma bei der Berechnung auf dem entsprechenden Zeitschritt (horizontale Achse) angegeben.

$k = 0.005$  (Abb. 5.4) und mit  $h = 0.025$ ,  $k = 0.02$  (Abb. 5.6) erhalten. Die numerischen Lösungen (Abb. 5.4, Abb. 5.6) approximieren die exakte Lösung mit sichtbaren Fehlern. Die entsprechenden Fehler in der  $C$ -Norm und der  $L_2$ -Norm sind in der Tabelle 5.2 dargestellt. Obwohl die Parameter der ersten numerischen

Parametern	$L_2$ -Norm	$C$ -Norm
$h=0.05$ , $k=0.005$	0.02540788	0.11362751
$h=0.025$ , $k=0.02$	0.04579524	0.20978012

Tabelle 5.2: Die  $L_2$ - und  $C$ -Normfehler der numerischen Lösungen (5.4) und (5.6).

Lösung (5.4) im Stabilitätsbereich  $k < 0.012$  und der zweiten numerischen Lösung außerhalb dieses Bereichs liegen, liefert das explizite Verfahren in beiden Fällen keine zuverlässigen Ergebnisse. Der Grund dafür liegt in der Diskretisierung des Nenners der Gleichung (5.15). Die diskrete Differenzengleichung (5.26) hat singuläre Stellen, die von der Schrittweite  $h$ , von der Funktion  $u$  sowie auch von der Genauigkeit der Berechnungen abhängen können. Außerdem kann die Division zweier kleiner Werte gleicher Ordnung zu einer großen Zahl führen, was in unserem Fall eine Instabilität der numerischen Lösung hervorruft. Das explizite Verfahren ist in diesem Sinne nicht verwendbar und muss unter der Berücksichtigung von Besonderheiten des Nenners modifiziert werden.

## Symmetrischreduzierte Modellgleichung mit konstanten Koeffizienten

Wir werden in diesem Abschnitt die ursprüngliche Differentialgleichung (5.15) mit Hilfe einer Zeittransformation aus einer Rückwärtsaufgabe in eine Vorwärtsaufgabe verwandeln. Die Differentialgleichung wird außerdem unter Ausnutzung der Symmetrie (3.64) in eine nichtlineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten umgeformt, was vom Gesichtspunkt des numerischen Verfahrens einen Gewinn bringen kann. Als Anfangs- und Randbedingungen werden wir die analytische Lösung  $u^*(S, t)$  (4.61) der Gleichung (5.15) annehmen. Wie es im Abschnitt 5.1.3 erläutert wurde, können wir in diesem Fall  $\rho = 1$  einsetzen und die Gleichung in der Form (5.17) betrachten.

Wir führen die Substitutionen

$$\tilde{t} = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad x = \ln S, \quad u(S, t) = S v(x, \tilde{t}) \quad (5.29)$$

durch. Setzen wir die neuen Variablen  $x$ ,  $\tilde{t}$  und die neue Funktion  $v(x, \tilde{t})$  in die Gleichung (5.15) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$v_{\tilde{t}} - \frac{v_x + v_{xx}}{(1 - (v_x + v_{xx}))^2} = 0, \quad (5.30)$$

wobei die Zeitvariable  $\tilde{t}$  sich von  $\tilde{t}_0 = 0$  bis  $\tilde{t}_{\max} = \frac{\sigma^2 T}{2}$  ändert und die Ortsvariable im Intervall  $x \in [\ln S_0, \ln S_{\max}]$  liegt. Für die Approximation der ersten Ableitung nach  $x$  verwenden wir eine zentrale Differenz wie folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, \tilde{t}_j) = \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \quad (5.31)$$

wobei  $v_{i,j}$  für die Bezeichnung der Funktionswerte  $v(S_i, \tilde{t}_j)$  in den Gitterpunkten steht. Die Funktionen  $v_{\tilde{t}}$ ,  $v_{xx}$  sind durch die Differenzen (5.8) bzw (5.6) approximiert. Sind  $w_{i,j}$  wie vorher die Approximationswerte für  $v_{i,j}$ , so nimmt die entsprechende Differenzengleichung die Form

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + 2\tau h^2 \frac{w_{i+1,j}(2+h) + w_{i-1,j}(2-h) - 4w_{i,j}}{(2h^2 - w_{i+1,j}(2+h) - w_{i-1,j}(2-h) + 4w_{i,j})^2} \quad (5.32)$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} w_{1,j} &= e^{-x_1} u^*(e^{x_1}, T - 2\tilde{t}_j/\sigma^2), \\ w_{N_x+1,j} &= e^{-x_{N_x+1}} u^*(e^{x_{N_x+1}}, T - 2\tilde{t}_j/\sigma^2), \\ w_{i,1} &= e^{-x_i} u^*(e^{x_i}, T) \end{aligned} \quad (5.33)$$

an, wobei  $(x_i, \tilde{t}_j)$  die Punkte eines äquidistanten Gitters

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + (i-1)h, \quad i = \overline{1, N_x + 1}, \quad N_x = \frac{x_{\max} - x_0}{h} \\ \tilde{t}_j &= (j-1)\tau, \quad j = \overline{1, N_t + 1}, \quad N_t = \frac{\tilde{t}_{\max}}{\tau} \end{aligned}$$

sind. Die Form der Differenzengleichung (5.32) läßt vermuten, dass der Nenner in diesem Fall auch eine wichtige Rolle in der Fragen der Stabilität spielen wird. Die Berechnungen wurden mit den Parametern der exakten Lösung  $u^*(S, t)$  (4.61)

$$\sigma = 0.349, \quad m = 3.13, \quad d_1 = 1.53, \quad d_2 = 0$$

durchgeführt. Im numerischen Schema werden die Orts- und Zeitschrittweiten

$$h = 0.05, 0.025, \quad k = 0.02, 0.005 \quad (5.34)$$

gewählt, wobei die übrigen Parameter

$$x_0 := \ln(0.05) \approx -2.995, \quad x_{\max} = 1, \quad \tilde{t}_{\max} := \frac{\sigma^2 T}{2} \approx 0.06, \quad T = 1$$

sind. Mit diesem numerischen Schema (5.32) und den Orts- und Zeitschritten (5.34) konnten keine zuverlässigen Ergebnisse beobachtet werden. Eine singuläre Stelle des diskreten Nenners in (5.32), welche von den Parametern  $h$  und nahe beieinander liegenden Werten der Funktion  $w_{i,j}$  abhängt, führen zu Instabilitäten des numerischen Verfahrens (s. Abb. 5.8).

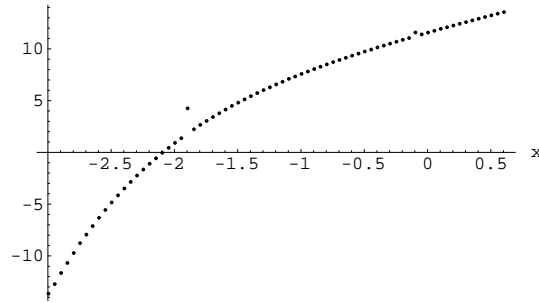


Abbildung 5.8: Die numerische Lösung  $w_{i,j}$  auf dem Gitter mit  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.005$  mit offensichtlichen Fehlern.

**Bemerkung 5.1.2** Das explizite numerische Verfahren für die nichtlineare Gleichung (5.15) ist für die Berechnung des Preises einer europäischen Call- oder Put-Option nicht geeignet. Wir betrachten ein Portfolio aus drei europäischen Call Optionen  $C(S, t)$ . In diesem Fall sind die Endbedingungen bekannt, d.h.  $C(S, T) = 3(S - K)^+$  (s. Abb. 5.9).

Aus der Form des expliziten Verfahrens (5.26) folgt, dass für  $j = N_t + 1$  und für beliebiges  $i < 1 + (K - S_0)/h$  gilt  $w_{i-1, N_t+1} - 2w_{i, N_t+1} + w_{i+1, N_t+1} = 0$  und für beliebiges  $i > 1 + (K - S_0)/h$  gilt

$$\begin{aligned} w_{i-1, N_t+1} - 2w_{i, N_t+1} + w_{i+1, N_t+1} &= 3((S_{i-1} - K) - 2(S_i - K) + (S_{i+1} - K)) \\ &= S_0 + (i-1)h - 2(S_0 + ih) + S_0 + (i+1)h \\ &= 0. \end{aligned}$$

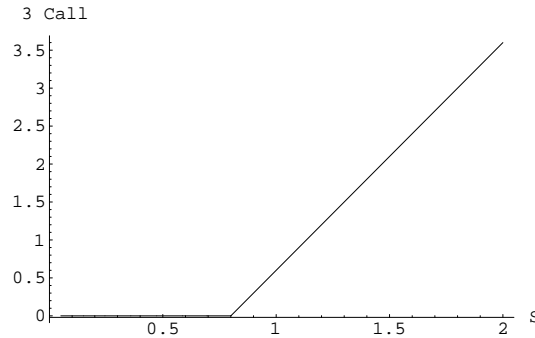


Abbildung 5.9: Die Payoff-Funktion von drei Call-Optionen mit Parametern  $S \in [0.05, 2]$ ,  $K = 0.8$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 0.349$ .

Wenn  $i = 1 + (K - S_0)/h$  ist, dann ist das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (5.26) eine kleine Zahl der Ordnung  $O(\tau h)$ . Somit ändert sich die numerische Lösung beim Übergang vom Schritt  $j = N_t + 1$  zu dem Schritt  $j = N_t$  im Wesentlichen nicht, nur in einem Punkt  $i = 1 + (K - S_0)/h$  wird die Änderung spürbar sein. Diese Änderung ruft aber keine weitere Entwicklung der Lösung mit der Zeit hervor. Das bedeutet, dass angefangen von diesem Zeitpunkt sich der Preis der Option nicht mehr ändert. Auf die gleiche Weise funktioniert das Schema (5.26), wenn der Preis einer Put-Option berechnet werden soll. Somit kann man behaupten, dass eine explizite Differenzenmethode für die nichtlineare Gleichung (5.15) zur Berechnung der Preises für Call- und Put-Optionen europäischer Art nicht verwendbar ist.

## 5.2 Das implizite Verfahren

### 5.2.1 Aufbau des numerischen Schemas für die Modellgleichung (3.1)

Wir werden in diesem Kapitel eine implizite Methode zur Gewinnung einer numerischen Lösung der Gleichung (5.15) betrachten. Ein großer Vorteil der impliziten Methode für lineare Gleichungen ist die Stabilität, die unabhängig von der Relation zwischen den Schrittweiten in der Richtung der Orts- und Zeitvariablen ist. Als ein wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens gilt, dass die Notwendigkeit entsteht, ein lineares System großer Ordnung zu berechnen. Im Fall einer nichtlinearen Differentialgleichung entsteht ein nichtlineares System mit mehreren Variablen. Wir beschreiben die Bildung dieses Systems für die Gleichung (5.15).

Wir ersetzen die Ableitungen in der Gleichung (5.15) durch die Differenzen (5.8)

und (5.6) und erhalten so bei einem fixierten  $j$  ein System von  $N_S - 1$  Gleichungen zur Bestimmung des Approximationswerts  $w_{i,j}$

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} + \frac{\tau\sigma^2 h^2}{2} \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{(h^2/S_i - \rho(w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}))^2} = 0, \quad i = \overline{2, N_S}, \quad j = \overline{N_t, 1}. \quad (5.35)$$

Dieses System gilt für die inneren  $N_S - 1$  Punkte. Wegen der rückwärts gestellten Aufgabe sind im System (5.35) die Werte auf der Schicht  $j+1$  bekannt, während die Werte auf der Schicht  $j$  zu bestimmen sind. Vom numerischen Standpunkt aus ist es angebracht das System mit dem Nenner des dritten Glieds zu multiplizieren und die linke Seite der Gleichung (5.35) als Polynom darzustellen. Weiterhin dividieren wir alle Koeffizienten in den Polynomen durch den Koeffizienten vor der höchsten Potenz  $w_{i,j}^3$ , welcher in diesem Fall immer gleich 4 ist. Nach der Umformung wird das System (5.35) so dargestellt

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{4} \left( \frac{h^2}{S_i} - \rho(w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) \right)^2 \\ & + \frac{\tau\sigma^2 h^2}{8} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) = 0, \quad i = \overline{2, N_S}, \quad j = \overline{N_t, 1}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Werte der Funktion  $w_{i,j}$  an den Rändern  $S_1$  und  $S_{N_S+1}$  für jedes fixierte  $j$  werden exakt aus den Randbedingungen berechnet

$$w_{1,j} = u_0(t_j), \quad w_{N_S+1,j} = u_1(t_j),$$

wobei die Funktionen  $u_0(t)$ ,  $u_1(t)$  in den weiteren Berechnungen in entsprechender Weise gewählt werden. Die Gleichungen bei  $i = 2$  und  $i = N_S$  verbinden nur zwei Unbekannte  $w_{2,j}$ ,  $w_{3,j}$  bzw.  $w_{N_S,j}$ ,  $w_{N_S-1,j}$ . Auf diese Weise stellen wir das System wie folgt dar

$$\begin{aligned} & \frac{w_{2,j+1} - w_{2,j}}{4} \left( \frac{h^2}{S_2} - \rho(u_0(t_j) - 2w_{2,j} + w_{3,j}) \right)^2 \\ & + \frac{\tau\sigma^2 h^2}{8} (u_0(t_j) - 2w_{2,j} + w_{3,j}) = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{4} \left( \frac{h^2}{S_i} - \rho(w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) \right)^2 \\ & + \frac{\tau\sigma^2 h^2}{8} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) = 0, \quad i = \overline{3, N_S - 1}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{w_{N_S,j+1} - w_{N_S,j}}{4} \left( \frac{h^2}{S_{N_S}} - \rho(w_{N_S-1,j} - 2w_{N_S,j} + u_1(t_j)) \right)^2 \\ & + \frac{\tau\sigma^2 h^2}{8} (w_{N_S-1,j} - 2w_{N_S,j} + u_1(t_j)) = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$



Der Parameter  $j$  ändert sich von  $N_t$  bis 1, somit ist das nichtlineare System (5.37)-(5.39) in jedem Zeitschritt  $j$  zu berechnen. Wenn  $j$  gleich  $N_t$  ist, sind alle Werte  $w_{iN_t+1}$  bekannt und stellen Endbedingungen dar.

### 5.2.2 Ergebnisse der numerischen Approximation der expliziten Lösungen

Es ist bekannt, dass das Newtonsche Iterationsverfahren und seine Modifikationen zur Lösung eines nichtlinearen Systems von Typ (5.37)-(5.39) gut geeignet sind. Jede Gleichung des Systems ist ein Polynom dritter Ordnung von jeweils drei (im Fall  $i = 2$  und  $i = N_S$  von zwei) unabhängigen Variablen und hat folglich jeweils mehrere Nullstellen. Eine Auswahl einer Anfangsapproximationsstelle für das Newtonsche Verfahren ist besonders wichtig für die schnelle Konvergenz des Verfahrens. In unserer Prozedur nehmen wir als die erste Approximation den entsprechenden berechneten Wert einer Variablen auf der Schicht  $j + 1$ , so dass der Wert  $w_{ij+1}$  die entsprechende erste Approximation für  $w_{ij}$  ist. Eine zusätzliche Schwierigkeit besteht darin, dass sich die expliziten Lösungen (4.61) oder die klassische Black-Scholes-Preiswertfunktion nur schwach im Lauf der Zeit ändern. Deswegen ist es wichtig auf die Genauigkeit der Berechnungen zu achten. Die Zunahme der Zeitschritteanzahl führt zur Notwendigkeit, die Präzision der Berechnungen von vornherein zu vergrößern. Zum Beispiel, für die eingebaute Funktion FINDROOT in MATHEMATICA 5.0, welche das Newtonsche Verfahren implementiert, wird es nicht genug sein nur die Maschinenpräzision (16 Stellen) zu benutzen. Wir haben 30 Stellen bei allen Berechnungen benutzt. In den nachfolgenden Abschnitten werden wir verschiedene End- und Randbedingungen für das System (5.37)-(5.39) betrachten.

#### Die expliziten Lösungen (4.61) der nichtlinearen Modellgleichung (5.15) als Endbedingungen

Als erstes versuchen wir das implizite Verfahren mit Hilfe der expliziten Lösungen der Gleichung (5.15) zu testen. Wie in Abschnitt (5.1.3) betont ist, können wir in weiteren Berechnungen  $\rho = 1$  annehmen und die Gleichung (5.17) betrachten. Die End- und Randbedingungen sind in diesem Fall wie folgt gewählt

$$w_{iN_t+1} = u^*(S_i, T), \quad (5.40)$$

$$u_0(t_j) = u^*(S_0, t_j), \quad u_1(t_j) = u^*(S_{N_S+1}, t_j). \quad (5.41)$$

Die Testberechnungen wurden auf den verschiedenen Gittern

$$h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.04, \quad \tau = 0.08, 0.05, 0.02.$$

mit den Variablen  $S, t$  aus den Intervallen  $S \in [0.05, 2], t \in [0, 1]$  durchgeführt. Beim Übergang von einem zu den anderen Gittern ändert sich der relative Fehler zwischen einer expliziten Lösung (4.61) und der Lösung  $w_{i,j}$ , welche durch die Berechnung des numerischen Systems (5.37)-(5.39) mit End- und Randbedingungen (5.40), (5.41) erhalten wurde, nicht wesentlich und beträgt etwa 0.2% (Abb. 5.10, 5.11). Dieses Ergebnis erscheint als zulässig, was es uns erlaubt weiter das implizite Verfahren mit anderen End- und Randbedingungen zu verwenden.

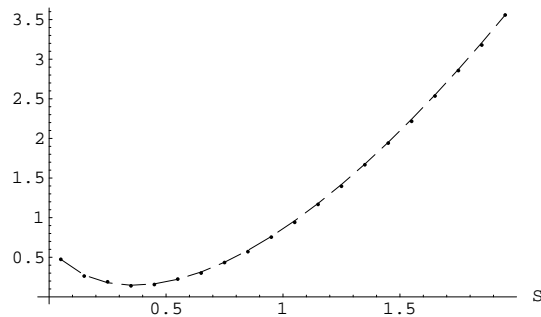


Abbildung 5.10: Die gestrichelte Linie ist die explizite Lösung (4.61) mit Parametern  $m = 3, d_1 = 1.1, d_2 = 0$ . Die gepunktete Linie ist die numerische Lösung  $w_{i,j}$  auf dem Gitter mit  $h = 0.1, \tau = 0.02$ .

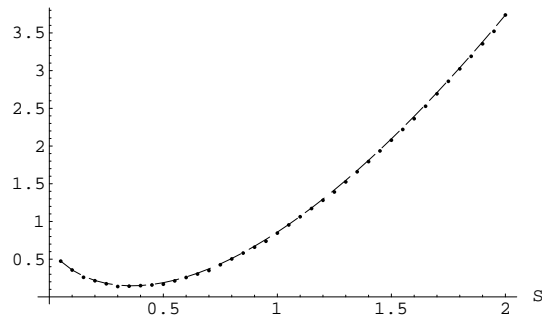


Abbildung 5.11: Die gestrichelte Linie ist die explizite Lösung (4.61) mit Parametern  $m = 3, d_1 = 1.1, d_2 = 0$ . Die gepunktete Linie ist die numerische Lösung  $w_{i,j}$  auf dem Gitter mit  $h = 0.05, \tau = 0.02$ .

### Eine der klassischen Endbedingungen - Payoff-Funktion einer europäischen Call-Option

Nachdem das implizite Verfahren auf einer analytischen Lösung erprobt wurde und annehmbare Ergebnisse gebracht hat, versuchen wir dieses Verfahren auf eine klassische Aufgabe anzuwenden. Wir werden nun als Endbedingungen eine Payoff-Funktion für eine europäische Call-Option nehmen. Die Payoff-Funktion ist eine stückweise lineare Funktion (Abb. 5.9) und ist in dem Punkt, wo der Aktienpreis gleich dem Ausübungspreis ist, nicht differenzierbar. Damit unterscheiden sich diese Endbedingungen von den Endbedingungen, welche durch eine glatte Funktion von der Art (4.61) gegeben sind. Andererseits setzen viele numerische Verfahren von vornherein glatte Endbedingungen voraus. Deswegen werden wir die Payoff-Funktion glätten. Wir betrachten eine Call-Option mit einer sehr kleiner Zeit bis zur Ausübung, z.B. eine Woche. Eine solche Funktion liegt sehr nahe an der Payoff-Funktion einer Call-Option, aber sie ist differenzierbar (Abb 5.12, 5.14).

Das Problem einer günstigen Auswahl von Approximationswerten für das Newtonsche Verfahren auf der ersten und den weiteren Zeitschichten ist in diesem Fall auch sehr aktuell. Die Gitterfunktion  $w_{i,N_t+1}$  auf der ersten Schicht  $j = N_t + 1$  bei  $t = T$  (entspricht der Payoff-Funktion) hat die Werte gleich Null auf dem Intervall  $(0, K - \varepsilon)$ . Null ist gleichzeitig eine triviale Lösung des nichtlinearen Systems (5.35). Das Newtonsche Verfahren ist so implementiert, dass in üblicher Weise stabile Lösungen des Systems gewählt werden, welche in diesem Fall triviale Lösungen sind. Es ist zu erwarten, dass das Newtonsche Verfahren schlecht unter solchen Bedingungen funktioniert und keine nichttrivialen Lösungen hervorbringt.

Wir können einige Auswege betrachten.

- Als eine mögliche Lösung dieses Problems kann man folgende Prozedur anbieten. Man hebt die Payoff-Funktion um eine kleine Konstante  $0 < \varkappa \ll 1$  (s. Abb. 5.12) und als erste Approximation für das Newtonsche Verfahren werden wir diese angehobene Funktion nehmen. Für weitere Zeitschritte  $j < N_t$  werden wir als eine Approximation an die Funktion  $w_{i,j}$  einen zuvor berechneten Wert  $w_{i,j+1}$  nehmen. Die gerade beschriebene Prozedur hilft uns schon auf der ersten Zeitschicht, die zu erwartende Lösung, die sich von der trivialen Lösung unterscheidet, zu erhalten. In der Abbildung 5.13 ist die berechnete Lösung dargestellt. Die Genauigkeit der Berechnungen spielt auch hier eine große Rolle. Je mehr Präzisionsstellen benutzt werden, desto kleiner kann die Konstante  $\varkappa$  genommen werden. Die Berechnungen (Abb. 5.13) wurden mit 30 Stellen durchgeführt. Die Konstante  $\varkappa$  in diesem Fall kann nicht kleiner als 0.02 sein.
- Als eine weitere Möglichkeit, die Funktionsweise des Newtonsche Verfahrens zu verbessern, kann man folgendes Verfahren anbieten. Um die triviale Lösung des Systems (5.37)-(5.39) zu vermeiden, weichen wir auch hier bei der Auswahl von den ersten Approximationswerten von Nullwerten ab. Statt für diese Approximationswerte die um die Konstante  $\varkappa$  angehobene Payoff-Funktion zu nehmen, werden wir zur Endfunktion eine glatte periodische Funktion mit einer kleinen Amplitude addieren (das imitiert weißes Rauschen). Wir nehmen im Newtonschen Verfahren als erste Approximationswerte bei der Berechnung der ersten Zeitschicht

$$\text{Payoff} + \varkappa \sin(\omega S),$$

wobei  $\varkappa = 0.03$ ,  $\omega = 3$  sind (s. Abb 5.14). In diesem Fall stabilisiert sich die Lösung wieder auf der ersten Zeitschicht, was zu guten Ergebnissen auf allen weiteren Schritten führt. Die berechnete Lösung ist in Abbildung 5.15 dargestellt.

Die Berechnungen auf Abbildungen 5.13, 5.15 wurden mit den Parametern des Systems (5.37)-(5.39)  $\sigma = 0.35$ ,  $\rho = 0.1$  im Bereich  $(S, t) \in [0.05, 2] \times [0, T]$ ,

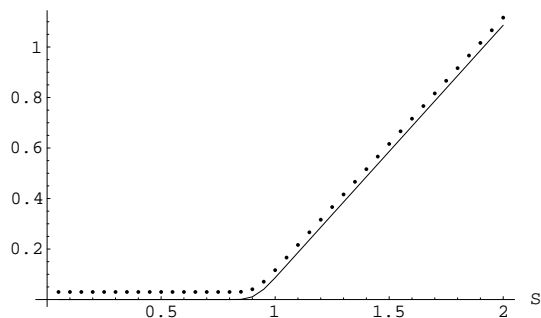


Abbildung 5.12: Die durchgezogene Linie ist die Payoff-Funktion von einer Call-Option mit der Laufzeit einer Woche, die gepunktete Linie ist die um eine Konstante 0.03 angehobene Funktion.

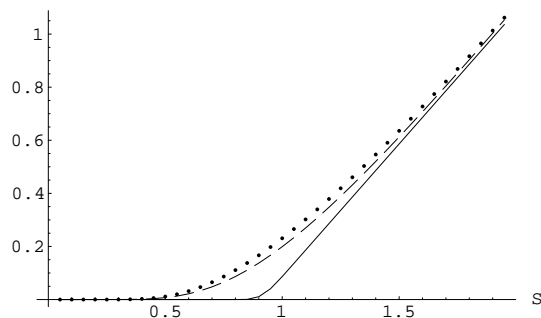


Abbildung 5.13: Die durchgezogene Linie stellt die Endbedingungen (eine Payoff-Funktion) dar. Die gestrichelte Linie ist Lösung der linearen Gleichung (D.5) mit Endbedingungen einer Call-Option. Die gepunktete Linie ist die numerische Lösung  $w_{i,j}$  der nichtlinearen Gleichung (3.1) auf dem Gitter  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.05$ .

$T = 1$ , auf dem Gitter mit  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.05$  durchgeführt. Bei der Berechnung der Payoff-Funktion von einer Call-Option mit der Laufzeit einer Woche nach der Formel (D.6) wurden zusätzlich  $r = 0.02$ ,  $K = 0.9$  gewählt. Beide Prozeduren führen zu ein und derselben Lösung. Somit ist zu vermuten, dass die Art und Weise der Auswahl des ersten Approximationswertes (sobald er nicht mit der trivialen Nulllösung zusammenfällt) die Struktur der gefundenen Lösung nicht beeinflusst.

Als nächstes untersuchen wir die  $\rho$ -Abhängigkeit der Lösungen der Gleichung (5.15) mit Endbedingungen, welche einer Call-Option entsprechen. Es ist zu erwarten, dass die Hedging-Kosten für ein Portfolio mit einer Call-Option steigen, wenn der Einfluß des Großhändlers steigt, d.h. bei größeren  $\rho$  hat man höhere Kosten zu tragen, um ein und dasselbe Portfolio zu hedgen. Die numerischen Lösungen der Gleichung (5.15) mit den End- und Randbedingungen einer Call-Option mit den Parametern

$$\sigma = 0.35, \quad T = 1, \quad S \in [0.05, 2], \quad r = 0.02, \quad K = 0.9,$$

welche auf dem Gitter mit  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.05$  mit dem impliziten Verfahren (5.37)-(5.39) berechnet wurden, sind in der Abbildung 5.16 dargestellt.

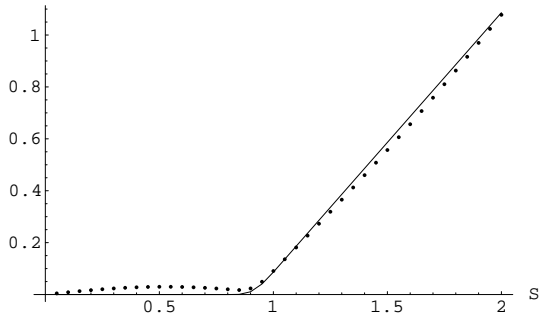


Abbildung 5.14: Die durchgezogene Linie ist die Payoff-Funktion von einer Call-Option mit der Laufzeit einer Woche. Die gepunktete Linie ist mit imitiertem weißen Rauschen  $0.03 \sin(3S)$  gestörte Funktion.

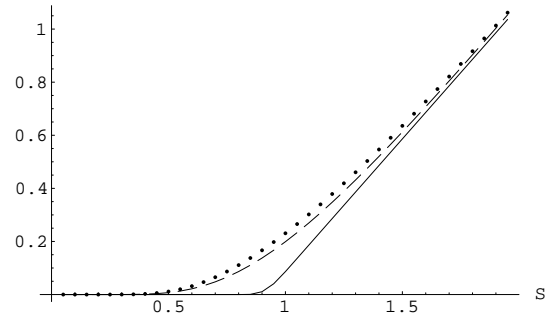


Abbildung 5.15: Die durchgezogene Linie stellt die Endbedingungen (eine Payoff-Funktion) dar. Die gestrichelte Linie ist Lösung der linearen Gleichung (D.5) mit Endbedingungen einer Call-Option. Die gepunktete Linie ist die numerische Lösung  $w_{i,j}$  der nichtlinearen Gleichung (3.1) auf dem Gitter  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.05$ .

## Numerische Lösungen mit Endbedingungen einer Kombination aus mehreren Call-Optionen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie die Nichtlinearität der Gleichung (5.15) das Verhalten der Lösungen beeinflusst. Wir berechnen zuerst eine numerische Lösung der Gleichung (5.15) für ein Portfolio aus drei Call-Optionen. Die entsprechende Payoff-Funktion ist in der Abbildung 5.9 dargestellt. Danach bestimmen wir eine numerische Lösung mit Endbedingungen, welche den fünf europäischen Call-Optionen entsprechen. Wir bezeichnen die entsprechenden numerischen Lösungen der Gleichung (5.15) mit  $w^{III}$  bzw mit  $w^V$  und bilden eine Summe von diesen Lösungen  $w^{\text{sum}} = w^{III} + w^V$ . In einem linearen Fall wäre  $w^{\text{sum}}$  eine Lösung für ein Portfolio, bestehend aus acht europäischen Call-Optionen. Im nichtlinearen Fall ist eine Summe der Lösungen keine Lösung derselben nichtlinearen Gleichung (5.15). Um diesen Unterschied deutlich zu zeigen, werden wir die numerische Lösung  $w^{VIII}$  mit Endbedingungen entsprechend der acht Call-Optionen separat berechnen. In der Abbildung 5.17 ist die Differenz zwischen den numerischen Lösungen  $w^{VIII}$  und  $w^{\text{sum}}$  dargestellt. Bei der Berechnungen der Lösungen  $w^{III}$ ,  $w^V$ ,  $w^{VIII}$  wurde das implizite Verfahren (5.37)-(5.39) auf dem Gitter mit  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.05$  im Bereich  $(S, t) \in [0.05, 2] \times [0, T]$  mit  $\rho = 0.03$  benutzt. Zum Vergleich ist in der Abbildung 5.17 eine Lösung des linearen Black-Scholes-Modells (D.6) dargestellt, welche das gleiche Portfolio, bestehend aus acht Call-Optionen modelliert, dabei

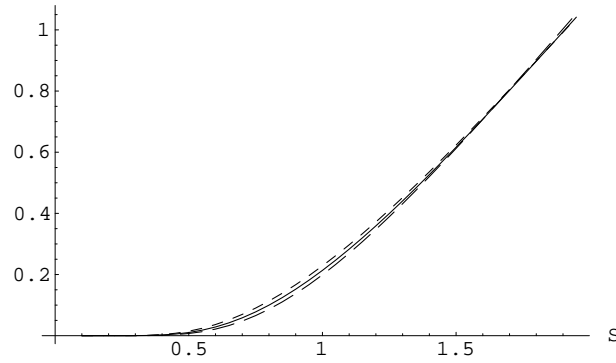


Abbildung 5.16: Die drei Linien stellen die numerischen Lösungen der Gleichung (5.15) mit verschiedenen Parametern  $\rho$  dar. Die kurz gestrichelte Linie entspricht dem Wert  $\rho = 0.3$ , die durchgezogene Linie entspricht  $\rho = 0.2$ , die gestrichelte Linie stellt eine Lösung mit  $\rho = 0.1$  dar. Besonders hoch ist die Differenz zwischen Hedging-Kosten bei unterschiedlichen  $\rho$ -Werten in der Umgebung des Basispreises  $K = 0.9$ .

wurden die Parameter

$$K = 0.9, \quad T = 0.9, \quad \sigma = 0.35, \quad r = 0.02$$

eingesetzt.

### Numerische Lösungen mit Endbedingungen einer europäischen Bull-Spread Option

Als nächstes versuchen wir solche End- und Randbedingungen zu nehmen, die sich völlig von den schon betrachteten unterscheiden. Wir werden eine Kombination von europäischen Optionen betrachten, eine Bull-Spread Option [37]. Eine Bull-Spread Option wird durch den Kauf einer europäischen Call-Option mit Basispreis  $K_1$  und den Verkauf einer europäischen Call-Option mit Basispreis  $K_2$  aufgebaut, wobei  $K_1 < K_2$  gilt. Die Laufzeit  $T$  und die zugrunde liegende Aktie sind gleich für beide Optionen. Um eine numerische Lösung für die nichtlineare Gleichung (5.15) mit dieser Payoff-Funktion zu erhalten, haben wir ein vollständig nichtlineares implizites Verfahren mit den Parametern  $h = 1$ ,  $\tau = 0.03$  verwendet. In der linearen Black-Scholes-Gleichung (D.5) wurden die Parameter  $r = 0.02$ ,  $\sigma = 0.35$  gewählt. Für die Bull-Spread Option haben wir die Parameter

$$K_1 = 60, \quad K_2 = 80, \quad S \in [20, 140], \quad t \in [0, T], \quad T = 1$$

benutzt. In der nichtlinearen Modellgleichung (5.15) haben wir den Parameter  $\rho$ , welcher den Anteil der Großhändler auf dem Markt widerspiegelt, als  $\rho =$

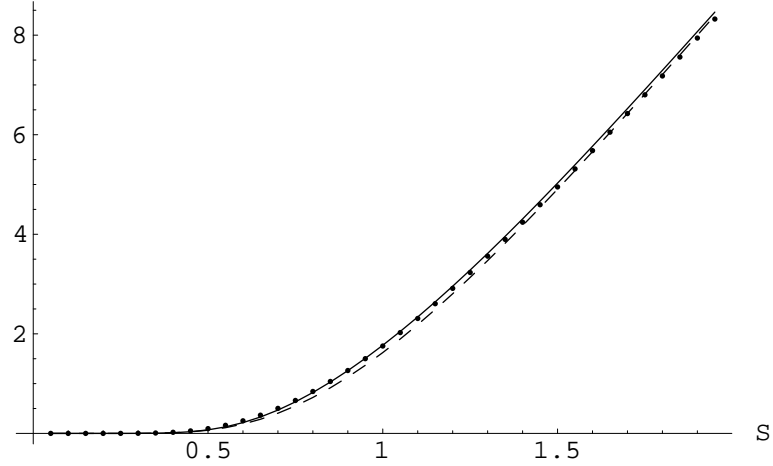


Abbildung 5.17: Die durchgehende Linie stellt die exakte Lösung der linearen Black-Scholes-Gleichung (D.5) dar. Die punktierte Linie stellt die numerische Lösung  $w^{VIII}$  der nichtlinearen Modellgleichung (5.15) dar, die gestrichelte Linie stellt eine Summe der Lösungen  $w^{III} + w^V$  dar.

0.2, 0.1, 0.05 gewählt. Die Endbedingung ist die Payoff-Funktion, die in der Abbildung 5.18 dargestellt ist.

Die Abbildungen 5.16-5.18 zeigen unter anderem, wie die Großhändler den Preis der Derivate beeinflussen. Je größer der Parameter  $\rho$  ist, d.h. je größer Anteil der Großhändler auf dem Markt ist, desto höher ist der Preis des Derivats.

### 5.2.3 Aufbau des numerischen Schemas “vorwärts” und ein numerischer Vergleich mit dem Schema mit “eingefrorenen” Koeffizienten

In diesem Abschnitt werden wir eine Modifikation des impliziten Verfahrens betrachten. Mit Hilfe der Transformation (5.29) haben wir die Gleichung (5.30) erhalten, die nun in der Richtung wachsender Zeitvariable  $t$  berechnet werden soll. Wir benutzen jetzt zur numerischen Berechnung der Gleichung

$$v_{\bar{t}} - \frac{v_x + v_{xx}}{(1 - (v_x + v_{xx}))^2} = 0, \quad (5.42)$$

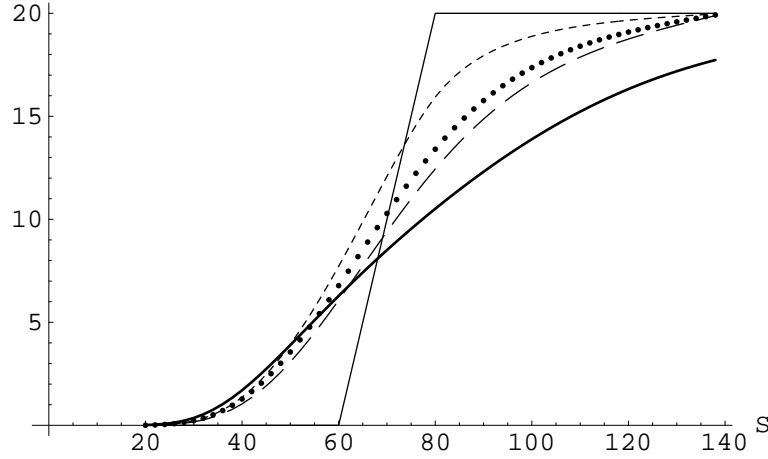


Abbildung 5.18: Die dünne durchgehende Linie stellt die Payoff-Funktion einer Bull-Spread-Option dar. Die dicke durchgehende Linie stellt die exakte Lösung der linearen Black-Scholes-Gleichung (D.5) dar. Andere Linien stellen die numerischen Lösungen der nichtlinearen Gleichung (5.15) mit verschiedenen Parametern  $\rho$  dar: die punktierte Linie mit  $\rho = 0.1$ , die gestrichelte Linie mit  $\rho = 0.05$ , die kurz gestrichelte Linie mit  $\rho = 0.2$

das implizite Verfahren. Die Anfangs- und Randbedingungen geben wir durch die explizite Lösung  $u^*(S, t)$  der Gleichung (5.15) wie in (5.33)

$$\begin{aligned} w_{1,j} &= e^{-x_1} u^*(e^{x_1}, T - 2\tilde{t}_j/\sigma^2), \\ w_{N_S+1,j} &= e^{-x_{N_S+1}} u^*(e^{x_{N_S+1}}, T - 2\tilde{t}_j/\sigma^2), \\ w_{i,1} &= e^{-x_i} u^*(e^{x_i}, T) \end{aligned} \quad (5.43)$$

vor. Nach dem Einsetzen der Differenzenquotienten (5.6), (5.7), (5.31) in die Gleichung (5.42) erhalten wir ein System von Gleichungen bezüglich der unbekannten Gitterfunktion  $w_{i,j}$ , welche die Approximationswerte zur Funktion  $v(x_i, \tilde{t}_j)$  in den Gitterpunkten  $(x_i, \tilde{t}_j)$  darstellt

$$\begin{aligned} & (w_{2j} - w_{2j-1}) (2h^2 - (w_{1,j}(2-h) - 4w_{2j} + w_{3j}(2+h)))^2 \\ & - 2\tau h^2 (w_{1,j}(2-h) - 4w_{2j} + w_{3j}(2+h)) = 0; \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} & (w_{i,j} - w_{i,j-1}) (2h^2 - (w_{i-1,j}(2-h) - 4w_{i,j} + w_{i+1,j}(2+h)))^2 \\ & - 2\tau h^2 (w_{i-1,j}(2-h) - 4w_{i,j} + w_{i+1,j}(2+h)) = 0, \quad i = \overline{3, N_S - 1}; \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} & (w_{N_S,j} - w_{N_S,j-1}) (2h^2 - (w_{N_S-1,j}(2-h) - 4w_{N_S,j} + w_{N_S+1,j}(2+h)))^2 \\ & - 2\tau h^2 (w_{N_S-1,j}(2-h) - 4w_{N_S,j} + w_{N_S+1,j}(2+h)) = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$



Die Koeffizienten in dem System (5.44)-(5.46) unterscheiden sich wesentlich von den Koeffizienten des Systems (5.37)-(5.39), wenn auch beide Systeme ähnlich sind in dem Sinne, dass sie beide verlangen, ein vollständig nichtlineares System algebraischer Gleichungen zu lösen.

Wir bilden ein modifiziertes numerisches Verfahren, das wir Methode mit “eingefrorenen” Koeffizienten nennen werden. Wir fixieren das nichtlineare Glied, das wir wie folgt definieren

$$d_j = \frac{(2h^2 + 4w_{i,j} - (2+h)w_{i+1,j} - w_{i-1,j}(2-h))^2}{4h^4} \quad (5.47)$$

auf der vorhergehenden Zeitschicht. Das bedeutet, dass bei der Berechnung der Funktionswerte im Schritt  $j$  der Wert  $d$  aus (5.47) aus dem Schritt  $j-1$  berechnet wird, d.h. wir nehmen den Wert  $d_{j-1}$ . Damit erhalten wir ein lineares System zur Bestimmung der Werte  $w_{i,j}$

$$w_{i,j} \left( \frac{2\tau}{h^2} + d_{j-1} \right) - w_{i+1,j} \frac{2+h}{2} \frac{\tau}{h^2} - w_{i-1,j} \frac{2-h}{2} \frac{\tau}{h^2} = w_{i,j-1} d_{j-1},$$

$$i = \overline{2, N_s}, \quad j = \overline{Nt+1, 1}. \quad (5.48)$$

Vergleichen wir jetzt die numerische Lösung des Systems (5.44)-(5.46) mit der numerischen Lösung des Systems (5.48) bei gleichen Anfangs- und Randbedingungen (5.43). Die Ergebnisse der Berechnung mit Hilfe der beiden Methoden wurden in Tabelle 5.3 zusammengefasst. In der Tabelle 5.3 sind die relativen Fehler in der C-Norm  $\varepsilon_{i,j}/u^*(S_i, t_j)$  bei verschiedener Anzahl von Zeit- und Ortsschritten dargestellt. Aus der Tabelle folgt, dass bei einer geringen Anzahl von Zeitschritten

$N_x$	16		28		42	
$N_\tau$	vollst. nichtl. V.	V. eingefr. Koeff.	vollst. nichtl. V.	V. eingefr. Koeff.	vollst. nichtlin. V.	V. eingefr. Koeff.
15	0.001459	0.0008166	0.0015906	0.00085608	0.00163685	0.00081117
30	0.001497	0.0011681	0.0015715	0.00130485	0.00171736	0.00134574

Tabelle 5.3: Vergleich zweier numerischer Verfahren. Erstens, ein vollständig nichtlineares Verfahren (“vollst. nichtl. V.”), das mit dem System (5.44)-(5.46) definiert ist und ein zweites Verfahren mit eingefrorenen Koeffizienten (“V. eingefr. Koeff.”), das durch das System (5.48) repräsentiert wird. Jedes Element in der Tabelle ist ein relativer Fehler im C-Raum bei verschiedener Anzahl von Zeit- und Ortschritten.

das Verfahren mit “eingefrorenen” Koeffizienten  $d_j$ , welche dem nichtlinearen Teil der Gleichung entsprechen, besser funktioniert als das vollständig implizite Verfahren. Aber bei der Vergrößerung der Anzahl der Zeitschritte sind die Ergebnisse vergleichbar und führen zu demselben relativen Fehler von ungefähr 0.2%.

## 5.3 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, dass die standardisierten numerischen Methoden nicht ohne weiteres von einem linearen auf einen nichtlinearen Fall übertragen werden können. Die Gleichung (5.15) hat eine wesentliche Nichtlinearität, wobei die zweite Ableitung der gesuchten Funktion im Nenner steht. Obwohl der Nenner überall außer in dem Punkt  $S = 0$  ungleich Null ist, kann die Diskretisierung der zweiten Ableitung zur Singularität in der Gleichung führen. Im Fall der expliziten Methode, wie wir im Abschnitt 5.1.4 gezeigt haben, ist diese Situation eingetreten. Für die explizite Methode haben wir numerisch gezeigt, dass das instabile Verhalten des Verfahrens nicht von der Auswahl der Zeit- und/oder Ortschrittweite für eine repräsentative Auswahl von Schrittweiten abhängt. Die weiteren Untersuchungen der expliziten Methoden sollten vielleicht in der Richtung einer besseren Approximation (mit höherer Ordnung) des Nenners und damit der Verbesserung des Verfahrens durchgeführt werden.

Das implizite Verfahren hat einen wesentlichen Vorteil vor dem expliziten Verfahren. Anstatt der rekursiven Formel (5.26) erhalten wir im impliziten Fall ein System von algebraischen Gleichungen (5.44)-(5.46). Damit ist es möglich, das ganze System mit dem Nenner zu multiplizieren und die Singularität, die durch die Diskretisierung entsteht, auszuschließen. Außerdem wurde festgestellt, dass die Linearisierung des numerischen Verfahrens für die nichtlineare Gleichung (5.15) mit Hilfe der Methode der "eingefrorenen" Koeffizienten nur zu einer etwas besseren Genauigkeit der Berechnungen, aber zu keiner besseren Ressourcennutzung führt. Somit ist das implizite Verfahren für dieser Gleichung gut verwendbar und braucht keine zusätzliche Modifikationen im Sinne der Vereinfachung.

Als nächstes haben wir gezeigt, dass die implizite Methode bezüglich schwacher Schwankungen in den Endbedingungen stabil ist (Abschnitt 5.2.2). Wir haben als erste Approximationswerte für das Newtonsche Verfahren zur Lösung des Systems (5.44)-(5.46) eine gestörte Payoff-Funktion entweder mit einer imitierten weißen Rauschstörung oder mit der Addition einer Konstante genommen und gezeigt, dass diese Störung keinen Einfluß auf die Lösung hat. Diese Prozedur hilft uns, die triviale Lösung des nichtlinearen Systems auszuschließen.

Die numerischen Berechnungen haben gezeigt, dass folgendes Problem eine Bedeutung erlangen kann. Die explizite Lösung (4.61) der nichtlinearen Gleichung (5.15) sowie eine Preisfunktion einer europäischen Option ändert sich im Lauf der Zeit nicht wesentlich. Deswegen ist es zum Erlangen von besseren numerischen Ergebnissen notwendig, die Genauigkeit der Berechnungen zu vergrößern.

Die Verifikation von numerischen Verfahren, welche in diesem Kapitel geschildert wurde, bildet eine Grundlage für weitere Untersuchungen, insbesondere zur Entwicklung effektiverer numerischen Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung von dem Typ (5.15).

# Anhang A

## Beweis des Lemmas 4.2.1

Wir führen die Berechnungen vor, die Lemma 4.2.1 beweisen. Zunächst formen wir den Nenner und den Zähler separat um

$$r(S, t) - 1 = \left( \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}}{m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}} \right)^{1/3} - 1 = \frac{\alpha_-^{1/3} - \alpha_+^{1/3}}{\alpha_+^{1/3}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} 1 + r(S, t) + r^2(S, t) &= 1 + \left( \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}}{m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}}{m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\alpha_+^{2/3} + \alpha_-^{2/3} + \alpha_-^{1/3} \alpha_+^{1/3}}{\alpha_+^{2/3}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nach dem Einsetzen von (A.1), (A.2) in den Logarithmus in der Formel (4.59) gilt folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \ln \frac{(1 + r(S, t) + r^2(S, t))^{1/2}}{r(S, t) - 1} &= \frac{4}{3} \ln \frac{1 + r(S, t) + r^2(S, t)}{(r(S, t) - 1)^2} \\ &= \frac{4}{3} \ln \frac{\alpha_+^{2/3} + \alpha_-^{2/3} + \alpha_-^{1/3} \alpha_+^{1/3}}{(\alpha_-^{1/3} - \alpha_+^{1/3})^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für die Vereinfachung der Berechnungen und insbesondere für die Beibehaltung der schon eingeführten Bezeichnungen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit im weiteren den Nenner in der Formel (A.3) in der Form  $(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})^2$

darstellen. Wir setzen zunächst  $m > 0$  voraus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \ln \frac{(\alpha_+^{2/3} + \alpha_-^{2/3} + \alpha_-^{1/3} \alpha_+^{1/3})}{(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})^2} \cdot \frac{(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})}{(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})} &= \frac{4}{3} \ln \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})^3} \\ &= \frac{4}{3} \ln \frac{2m}{(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})^3} = -4 \ln(\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3}) + \frac{4}{3} \ln 2m. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Sei jetzt  $m < 0$ . Wir führen eine neue positive Variable  $\tilde{m} = -m$  ein und betrachten

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_+ &:= \alpha_- = \tilde{m} + \sqrt{\tilde{m}^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}}, \\ \tilde{\alpha}_- &:= \alpha_+ = -\tilde{m} + \sqrt{\tilde{m}^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}}. \end{aligned}$$

Wir führen ähnliche Berechnungen wie im (A.4) durch und erhalten den Ausdruck

$$-4 \ln(\tilde{\alpha}_+^{1/3} - \tilde{\alpha}_-^{1/3}) + \frac{4}{3} \ln 2\tilde{m}.$$

Diese Form ist völlig identisch zu (A.4), somit können wir  $m$  beliebig wählen und werden im weiteren  $4/3 \ln 2\tilde{m}$  bzw  $4/3 \ln 2m$  als eine beliebige Konstante betrachten.

Die zweite Relation aus Lemma 4.2.1 läßt sich mit folgender einfachen Berechnung verifizieren,

$$\begin{aligned} r^2(S, t) + \frac{1}{r^2(S, t)} &= \frac{\left(-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}\right)^{2/3}}{\left(m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}\right)^{2/3}} + \frac{\left(m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}\right)^{2/3}}{\left(-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3\sigma^2}{16}t}}\right)^{2/3}} \\ &= \frac{\alpha_+^{4/3} + \alpha_-^{4/3}}{(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3}}. \end{aligned}$$

# Anhang B

## Beweis des Satzes 4.2.1

Die Konstante  $d_2$  folgt aus der Existenz der Erzeugenden  $V_4$  (3.50) der Lie-Gruppe der Gleichung (3.1). Die Konstante  $m \neq 0$  ist durch Formel (4.42) mit früher eingeführten Konstanten verbunden und kann wegen der Willkürlichkeit der Konstanten  $a_1, a_2, d$  beliebig gewählt werden. Aus der Symmetrieeigenschaft (3.61) der ursprünglichen Gleichung (3.1) können wir nun beweisen, dass die Funktion

$$u(S, t) = \frac{S}{\rho} \tilde{v}(S, t)$$

eine Lösung ist, wobei als  $\tilde{v}$  folgende Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{v}(S, t) = & \ln S - \frac{\sigma^2 t}{8} \\ & - \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}})^{\frac{4}{3}} + (-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}})^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}Se^{-\sigma^2 t/8}} \\ & - 4 \ln \left( (m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}})^{\frac{1}{3}} - (-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}})^{\frac{1}{3}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

bezeichnet wurde.

Es gilt

$$u_t = \frac{S}{\rho} \tilde{v}_t, \quad (\text{B.2})$$

$$u_S = \frac{1}{\rho} (\tilde{v} + S \tilde{v}_S), \quad (\text{B.3})$$

$$u_{SS} = \frac{1}{\rho} (2\tilde{v}_S + S \tilde{v}_{SS}), \quad (\text{B.4})$$

$$1 - \rho S u_{SS} = 1 - S (2\tilde{v}_S + S \tilde{v}_{SS}). \quad (\text{B.5})$$

Setzen wir (B.2)-(B.5) in die Gleichung (3.1) ein, so erhalten wir folgende Relation für die Funktion  $\tilde{v}$

$$\frac{S}{\rho} \left( \tilde{v}_t + \frac{\sigma^2 S}{2} \frac{2\tilde{v}_S + S \tilde{v}_{SS}}{(1 - S(2\tilde{v}_S + S \tilde{v}_{SS}))^2} \right) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Die Variablen  $S, \rho$  sind identisch ungleich Null, so dass die folgende Gleichung erfüllt werden muß

$$\tilde{v}_t + \frac{\sigma^2 S}{2} \frac{2\tilde{v}_S + S \tilde{v}_{SS}}{(1 - S(2\tilde{v}_S + S \tilde{v}_{SS}))^2} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Führen wir unter Berücksichtigung (4.57), (4.58) folgende Bezeichnung ein

$$\begin{aligned} \chi(S, t) &= \frac{(m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}})^{4/3} + (-m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3t\sigma^2}{16}}})^{4/3}}{2^{\frac{4}{3}}S e^{-\sigma^2 t/8}} \\ &= \frac{(\alpha_+)^{4/3} + (\alpha_-)^{4/3}}{2^{\frac{4}{3}}S e^{-\sigma^2 t/8}}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

so können wir die Funktion  $\tilde{v}$  aus (B.1) wie folgt darstellen,

$$\tilde{v}(S, t) = \ln S - \frac{\sigma^2 t}{8} - \chi(S, t) - 4 \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right). \quad (\text{B.9})$$

Wir berechnen die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{\pm}^{4/3}}{\partial t} &= -\frac{\alpha_{\pm}^{1/3} S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16} \sigma^2}{2\sqrt{m^2 + 4S^{3/2}e^{-3t\sigma^2/16}}}; \\ \frac{\partial \alpha_{\pm}^{4/3}}{\partial S} &= \frac{4S^{1/2} e^{-3t\sigma^2/16} \alpha_{\pm}^{1/3}}{\sqrt{m^2 + 4S^{3/2}e^{-3t\sigma^2/16}}}; \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \frac{\sigma^2}{8} \frac{m(\alpha_+^{4/3} - \alpha_-^{4/3})}{2^{4/3} S^2 e^{-\sigma^2 t/8} \sqrt{m^2 + 4S^{3/2}e^{-3t\sigma^2/16}}}; \\ \frac{\partial \chi}{\partial S} &= \frac{m(\alpha_-^{4/3} - \alpha_+^{4/3})}{2^{4/3} S e^{-\sigma^2 t/8} \sqrt{m^2 + 4S^{3/2}e^{-3t\sigma^2/16}}}. \end{aligned}$$

Die zwei letzten Ausdrücke für  $\partial \chi / \partial t$  und  $\partial \chi / \partial S$  führen zu

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 S}{8} \frac{\partial \chi}{\partial S}. \quad (\text{B.10})$$

Aus den direkten Berechnungen der Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial S} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) = -\frac{e^{-t\sigma^2/16} (\alpha_+^{1/3} + \alpha_-^{1/3})}{2^{4/3} S^{1/2} \sqrt{m^2 + 4S^{3/2}e^{-3t\sigma^2/16}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) = \frac{\sigma^2}{8} \frac{S^{1/2} e^{-t\sigma^2/16} (\alpha_+^{1/3} + \alpha_-^{1/3})}{2^{4/3} \sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}}};$$

folgt die Relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) = -\frac{\sigma^2 S}{8} \frac{\partial}{\partial S} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right). \quad (\text{B.11})$$

Wir verwenden (B.10), (B.11) und die entsprechenden Ausdrücke für die Ableitungen von  $\chi$  und vom Logarithmus, um  $\tilde{v}_S$ ,  $\tilde{v}_{SS}$ ,  $\tilde{v}_t$  zu berechnen

$$\begin{aligned} \tilde{v}_S &= \frac{1}{S} - \frac{\partial \chi}{\partial S} - 4 \frac{\partial}{\partial S} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) = \frac{1}{S} + \frac{\alpha_+^{4/3} + \alpha_-^{4/3}}{2^{4/3} S^2 e^{-\sigma^2 t/8}} \\ &= \frac{1}{S} (1 + \chi), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{v}_{SS} = (\tilde{v}_S)_S = \frac{1}{S} \left( \chi_S - \frac{1 + \chi}{S} \right), \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t &= -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{\partial \chi}{\partial t} - 4 \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) \\ &= -\frac{\sigma^2}{8} + \frac{\sigma^2 S}{8} \frac{\partial \chi}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S}{2} \frac{\partial}{\partial S} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) \\ &= -\frac{\sigma^2}{8} \left( 1 + S \left( -\frac{\partial \chi}{\partial S} - 4 \frac{\partial}{\partial S} \ln \left( \alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3} \right) \right) \right) \\ &= -\frac{\sigma^2}{8} (1 + \chi). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Aus (B.12) und (B.14) folgt in diesem Fall auch eine Relation ähnlich zu den Relationen (B.10), (B.11)

$$\tilde{v}_t = -\frac{\sigma^2}{8} \tilde{v}_S.$$

Als nächstes formen wir den Zähler und den Nenner der Gleichung (B.7) um

$$2\tilde{v}_S + S\tilde{v}_{SS} = \chi_S + \frac{1 + \chi}{S}. \quad (\text{B.15})$$

Die Relationen (B.12), (B.13) wurden damit benutzt. Unter der Berücksichtigung von (B.15) läßt sich der Nenner wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} (1 - S(2\tilde{v}_S + S\tilde{v}_{SS}))^2 &= (1 - S \frac{1}{S} (\chi_S S + 1 + \chi))^2 \\ &= (\chi + \chi_S S)^2 = ((\chi S)_S)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Für die weitere Verwendung berechnen wir direkt die Ableitung in (B.16)

$$(\chi S)_S = \left( \frac{\alpha_+^{4/3} + \alpha_-^{4/3}}{2^{4/3} e^{-\sigma^2 t/8}} \right)_S = \frac{2^{2/3} S^{1/2} e^{-\sigma^2 t/16}}{\sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}}} (\alpha_+^{1/3} + \alpha_-^{1/3}). \quad (\text{B.17})$$

Fassen wir (B.15) und (B.16) zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S \frac{2\tilde{v}_S + S\tilde{v}_{SS}}{(1 - S(2\tilde{v}_S + S\tilde{v}_{SS}))^2} &= S \frac{\chi_S + (1 + \chi)/S}{((\chi S)_S)^2} \\ &= \frac{(S\chi_S + \chi + 1)}{((\chi S)_S)^2} = \frac{(\chi S)_S + 1}{((\chi S)_S)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Setzen wir jetzt (B.14), (B.18) in die Gleichung (B.7) ein, so erhalten wir folgende Gleichung

$$-\frac{\sigma^2}{8}(1 + \chi) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{(\chi S)_S + 1}{((\chi S)_S)^2} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Diese Gleichung kann nach der Umformung auf eine Gleichung bezüglich der Hilfsfunktion  $\chi(S, t)$  und der unabhängigen Variablen  $S, t$  gebracht werden

$$((\chi S)_S)^2(1 + \chi) - 4(\chi S)_S - 4 = 0. \quad (\text{B.20})$$

Wir berechnen direkt die linke Seite der Gleichung (B.20) und zeigen, dass sie identisch gleich Null ist. Wir werden bei der Berechnung folgende Relationen benutzen

$$(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3} = (4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16})^{2/3} = 2^{4/3} S e^{-t\sigma^2/8}; \quad (\text{B.21})$$

$$\alpha_+ - \alpha_- = 2m; \quad \alpha_+ + \alpha_- = 2\sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}}. \quad (\text{B.22})$$

Wir stellen den Faktor  $(1 + \chi)$  in nachfolgender Form dar

$$\begin{aligned} 1 + \chi &= 1 + \frac{\alpha_+^{4/3} + \alpha_-^{4/3}}{(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3}} = \frac{(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3} + \alpha_+^{4/3} + \alpha_-^{4/3}}{(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3}} \cdot \frac{\alpha_+^{2/3} - \alpha_-^{2/3}}{\alpha_+^{2/3} - \alpha_-^{2/3}} \\ &= \frac{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}{(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3} (\alpha_+^{2/3} - \alpha_-^{2/3})} = \frac{4m\sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}}}{(\alpha_+ \alpha_-)^{2/3} (\alpha_+^{2/3} - \alpha_-^{2/3})}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (B.17), (B.21), (B.23) erhalten wir für die linke Seite von (B.20)

$$\begin{aligned} &\frac{4m(\alpha_+^{1/3} + \alpha_-^{1/3})}{\sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}} (\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})} - 4 \frac{(\alpha_+ \alpha_-)^{1/3} (\alpha_+^{1/3} + \alpha_-^{1/3})}{\sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}}} - 4 \\ &= \frac{4}{\sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}} (\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3})} \times \\ &\left( m(\alpha_+^{1/3} + \alpha_-^{1/3}) - \alpha_+^{1/3} \alpha_-^{1/3} (\alpha_+^{2/3} - \alpha_-^{2/3}) - (\alpha_+^{1/3} - \alpha_-^{1/3}) \sqrt{m^2 + 4S^{3/2} e^{-3t\sigma^2/16}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$



Wir zeigen jetzt, dass der gemeinsame Faktor im Ausdruck (B.24) identisch Null ist

$$\begin{aligned}
& m(\alpha_+^{\frac{1}{3}} + \alpha_-^{\frac{1}{3}}) - \alpha_+^{\frac{1}{3}}\alpha_-^{\frac{1}{3}}(\alpha_+^{\frac{2}{3}} - \alpha_-^{\frac{2}{3}}) - (\alpha_+^{\frac{1}{3}} - \alpha_-^{\frac{1}{3}})\sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-3t\sigma^2}{16}}} \\
&= \alpha_+^{\frac{1}{3}}(m - \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-3t\sigma^2}{16}}}) + \alpha_-^{\frac{1}{3}}(m + \sqrt{m^2 + 4S^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-3t\sigma^2}{16}}}) \\
&\quad - \alpha_+^{\frac{1}{3}}\alpha_-^{\frac{1}{3}} + \alpha_-^{\frac{1}{3}}\alpha_+^{\frac{1}{3}} \\
&= -\alpha_-^{\frac{1}{3}}\alpha_+^{\frac{1}{3}} + \alpha_+^{\frac{1}{3}}\alpha_-^{\frac{1}{3}} - \alpha_+^{\frac{1}{3}}\alpha_-^{\frac{1}{3}} + \alpha_-^{\frac{1}{3}}\alpha_+^{\frac{1}{3}} \equiv 0. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Die Identität (B.25) beweist, dass die Hilfsgleichung (B.20) und folglich die Gleichung (B.7) identisch erfüllt sind. Somit haben wir gezeigt, dass die Gleichung (3.1) die Lösung (4.61) besitzt.



# Anhang C

## Beweis des Lemmas 5.1.2

Wir zeigen, dass

$$\frac{\partial F}{\partial u_{SS}} = \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{1 + Su_{SS}}{(1 - Su_{SS})^3} < 0, \quad (\text{C.1})$$

für die expliziten Lösungen (4.61) gilt. Wir benutzen die Hilfsfunktion  $\chi(S, t)$  (B.8), welche im Anhang B eingeführt wurde. Aus (B.4) und (B.15) folgt die Relation

$$Su_{SS} = \frac{S}{\rho} \left( \chi_S + \frac{1 + \chi}{S} \right) = \frac{1 + (\chi S)_S}{\rho}.$$

Laut der expliziten Form (B.17) folgt, dass die Funktion  $(\chi S)_S$  immer positiv bleibt. Somit erhalten wir, dass

$$1 + \frac{1 + (\chi S)_S}{\rho} > 0, \quad \frac{1 + (\chi S)_S}{\rho} > 1 \Rightarrow 1 + (\chi S)_S > \rho$$

mit  $0 < \rho < 1$  gilt. Damit ist die Behauptung (C.1) bewiesen.



## Anhang D

# Herleitung der Black-Scholes-Formel und des Binomialmodells für europäische Optionen

### Black-Scholes-Formel

Die Differentialgleichung von Black, Scholes [5] und Merton [56] wurde unter den Voraussetzungen 1-6 (Seite 13) hergeleitet. Zur Zeit gibt es mehrere Methoden die Black-Scholes-Formel herzuleiten. Darunter sind z.B. die Optionspreisbewertung mit Hilfe eines äquivalenten Martingalmaßes [32], [47] oder die Bildung eines Duplikationsportfolios, das ausschließlich aus Finanzinstrumenten mit einem bekannten Preis besteht und eine gegebene Option dupliziert [23], [49].

Wir werden dem klassischen Ansatz von Black und Scholes folgen. Die von ihnen entwickelte Methode basiert auf der Konstruktion eines risikolosen Portfolios aus Aktien und Optionen auf diese Aktien. Die Autoren betrachten in ihrer Arbeit ein Portfolio, das aus Aktien und genau einer verkauften Option besteht. Black und Scholes haben angenommen, dass sich der Optionspreis zur Zeit  $t$  als eine glatte Funktion  $V(S, t)$  der Zeit und des Aktienpreises  $S$  darstellen läßt. Die verkaufte Option entspricht einer Position von  $+V(S, t)$  im Portfolio. Somit läßt sich das Portfolio als

$$\Pi = V(S, t) + \alpha_t S \quad (\text{D.1})$$

darstellen, wobei  $\alpha_t$  die Anzahl der Aktien im Portfolio ist. Die Änderung des Portfoliowertes in einem kleinen Zeitintervall  $dt$  ist dann

$$d\Pi = dV(S, t) + \alpha_t dS.$$

Nach der Annahme 5 (Seite 13) folgt der Aktienkurs einem stochastischen Prozess

(2.1). Somit wird die Änderung  $d\Pi$  nach dem Itô-Lemma [44] als

$$d\Pi = \left( \alpha_t + \frac{\partial V}{\partial S} \right) \sigma S dW_t + \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \mu S \alpha_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \quad (\text{D.2})$$

darstellt. Damit der Preisbildungsprozess  $\Pi$  einem risikolosen Portfolio entspricht, werden wir die zufällige Komponente eliminieren in dem wir

$$\alpha_t = -\frac{\partial V}{\partial S} \quad (\text{D.3})$$

annehmen. Der negative Wert von  $\alpha_t$  bedeutet, dass der Portfoliobesitzer eine Long-Position in Aktien hat, d.h. dass er die Aktien gekauft hat. Aus dem Prinzip der Arbitragefreiheit muss sich der Portfoliowert  $\Pi$  wie ein Bond entwickeln, man verlangt folglich

$$d\Pi = r\Pi dt, \quad (\text{D.4})$$

wobei  $r$  ein konstanter risikofreier Zinssatz ist (Annahme 4, Seite 13). Setzen wir (D.1), (D.3) und (D.4) in der Gleichung (D.2) ein, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung von Black und Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} = rV. \quad (\text{D.5})$$

Zusammen mit der Endbedingung in dem Zeitpunkt  $t = T$  und den Randbedingungen in  $S = 0$  und  $S \rightarrow \infty$ ,

$$V(S, T) = h(S), \quad V(0, t) = h_1(t), \quad V(S, t)_{S \rightarrow \infty} = h_2(t),$$

erhalten wir eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (D.5), welche dem Preis einer Option entspricht.

Der Preis eines Derivats  $V(S, t)$  zum Zeitpunkt  $t$  für einen Aktienkurs  $S$  ist eine Lösung der Differentialgleichung (D.5) von Black, Scholes [5] und Merton [56] mit der Endbedingung  $V(S, T) = h(S)$ , wobei  $T$  das Fälligkeitstermin des Derivats und die Funktion  $h(S)$  die Payoff-Funktion des gegebenen Derivats sind. Die End- und Randbedingungen für eine Call-Option  $C(S, t)$  bzw. eine Put-Option  $\mathcal{P}(S, t)$  sind

$$C(S, T) = (S - K)^+, \quad C(0, t) = 0, \quad C(S, t)_{S \rightarrow \infty} = S - Ke^{-r(T-t)},$$

$$\mathcal{P}(S, T) = (K - S)^+, \quad \mathcal{P}(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \mathcal{P}(S, t)_{S \rightarrow \infty} = 0.$$

Black und Scholes haben die explizite Form der Lösung der Differentialgleichung (D.5) mit End- und Randbedingungen für europäische Optionen hergeleitet. Für

eine Call-Option hat die explizite Lösung die Gestalt

$$C(S, t) = S_0 \Phi(\mathfrak{d}_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(\mathfrak{d}_2), \quad (\text{D.6})$$

$$\mathfrak{d}_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (\text{D.7})$$

$$\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (\text{D.8})$$

wobei  $\Phi(\cdot)$  die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung [48] ist. Der Preis einer Put-Option lässt sich nach der Put-Call-Parität

$$C(S, t) + K e^{-r(T-t)} = \mathcal{P}(S, t) + S_0$$

bestimmen und hat folgende Form

$$\mathcal{P}(S, t) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-\mathfrak{d}_2) - S_0 \Phi(-\mathfrak{d}_1), \quad (\text{D.9})$$

wobei  $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$  in den Formeln (D.7), (D.8) definiert sind.

### Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein

Das Binomialmodell wurde von Cox, Ross und Rubinstein [17] auf Grundlage der Black-Scholes-Gleichung entwickelt und hat die gleichen Voraussetzungen wie das Black-Scholes-Modell, abgesehen von der Annahme der kontinuierlichen Zeit. Wir betrachten einen Einperiodenfall des Binomialmodells zur Bewertung von europäischen Call-Optionen und erläutern, wie die Berechnungen von einem Einperiodenfall auf einen Mehrperiodenfall erweitert werden können. Der Zeitpunkt  $t_0$  stellt dabei jenen Zeitpunkt dar, an dem die Option bewertet wird. Mit  $t_1$  ist dann der Verfallstermin gekennzeichnet. Im Zeitpunkt  $t_1$  unterscheidet man zwei verschiedene Möglichkeiten für den Aktienkurs,  $S_{1u}$  und  $S_{1d}$ . Der mit Buchstaben  $u$  und  $d$  bezeichnete Index gibt die Richtung der Kursbewegung an ( $u=\text{up}$ ,  $d=\text{down}$ ), und der in Ziffern ausgedrückte Index bezeichnet die jeweiligen Zeitpunkte. Wir betrachten ein Portfolio, das aus einer verkauften Call-Option  $C_0$  und aus  $\alpha_0$  gekauften Aktien mit dem Preis  $S_0$  besteht

$$\Pi = C_0 - \alpha_0 S_0.$$

Aus der Annahme eines risikolosen und selbst-finanzierenden Portfolios folgt

$$C_{1u} - \alpha_0 S_{1u} = C_{1d} - \alpha_0 S_{1d}. \quad (\text{D.10})$$

Die Werte  $C_{1u}$  und  $C_{1d}$  sind bekannt und stellen eine Payoff-Funktion einer Option bei den Aktienkursen  $S_{1u}$  bzw.  $S_{1d}$  dar. Die linke Seite der Gleichung (D.10) entspricht einem Portfoliowert im Zeitpunkt  $t_1$  wenn der Aktienkurs steigt, die rechte

Seite entspricht dem Portfoliowert wenn der Aktienkurs fällt. Die Anzahl der zu kaufenden Aktien

$$\alpha_0 = \frac{C_{1u} - C_{1d}}{S_{1u} - S_{1d}} \quad (\text{D.11})$$

entspricht dem Verhältnis der maximalen Kursdifferenz der Optionswerte einerseits und der Aktienkurs andererseits. Aus dem Prinzip der Arbitragefreiheit des Marktes muss

$$C_{1u} - \alpha_0 S_{1u} = e^{r(t_1 - t_0)} (C_0 - \alpha_0 S_0)$$

beziehungsweise

$$C_0 = \alpha_0 S_0 + (C_{1u} - \alpha_0 S_{1u}) e^{-r(t_1 - t_0)} \quad (\text{D.12})$$

folgen. Setzen wir  $\alpha_0$  aus (D.11) in (D.12) ein, so erhalten wir

$$C_0 = e^{-r(t_1 - t_0)} (pC_{1u} + qC_{1d}),$$

wobei

$$p = \frac{e^{r(t_1 - t_0)} - S_{1d}/S_0}{S_{1u}/S_0 - S_{1d}/S_0}, \quad q = 1 - p$$

gilt. Es ist gebräuchlich den Parameter  $p$  als eine Wahrscheinlichkeit zu interpretieren, mit welcher der Aktienkurs steigen wird. Der Parameter  $q$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs fällt.

Die Ausweitung des Einperiodenfalls auf mehrere Perioden erfolgt, in dem man auf jeden Zustand  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , zwei weitere Zustände  $S_{iu}$  und  $S_{id}$  folgen lässt, und somit der binomiale Charakter der Verteilung beibehalten wird. Ausgehend von den bekannten Werten der Payoff-Funktion im Zeitpunkt  $t_n = T$  kann man mit einer Rekursion sukzessive alle Optionswerte bis zum Wert  $C_0$  bestimmen. Die ausführliche Prozedur sowie andere Ansätze zur Herleitung des Binomialmodells sind in den Büchern [49], [23] u.a. dargestellt.



# Anhang E

## Glossar

**Amerikanische Option** Bei einer amerikanischen Option kann der Inhaber der Option (Optionskäufer) das Optionsrecht jederzeit während der gesamten Laufzeit der Option ausüben.

**Arbitrage** Ankaufen von Wertpapieren an einem Ort und Verkauf derselben an einem anderen mit dem Ziel der Vorteilsnahme aus Preisdifferenz.

**Arbitragefreiheit eines Marktes** Ein Markt ist arbitragefrei, wenn es keine Arbitragemöglichkeit gibt.

**Arbitragemöglichkeit** Die Möglichkeit eines risikolosen Profits beim Handel mit Finanzgütern.

**Basispreis** Der Preis (Kurs), der bei Abschluß einer Option vereinbart wird, zu dem das zugrundeliegende Basisinstrument am Ende der Laufzeit (europäische Option) oder zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit (amerikanische Option) abzurechnen sind. Der Basispreis wird auch als Bezugspreis, Ausübungspreis oder Strike-Preis bezeichnet.

**Basiswert** Ein Marktinstrument, welches bei Ausübung oder Fälligkeit einer Option zu verkaufen oder zu kaufen ist. In Frage kommen vor allem Aktien, Anleihen, Währungen, Rohstoffe und Indizes. Der Basiswert wird auch als Basisinstrument, Bezugswert, Bezugsobjekt oder Underlying bezeichnet.

**Bond (Anleihe)** Bond oder auch Anleihe ist der Überbegriff für festverzinsliche Schuldverschreibungen. Es gibt öffentliche Anleihen (Staat, Post, Bahn, Kommunen etc.), Pfandbriefe (Anleihen von Hypothekenbanken) und Industrieanleihen (Industrieobligationen), die zur Finanzierung von Investitionsvorhaben ausgegeben werden.

**Call-Option (Kaufoption)** Eine Call-Option gewährt dem Käufer gegen eine Prämie das vertraglich zugesicherte Recht, ein bestimmtes Basisgut zu vorher festgelegten Konditionen (Termin, Preis usw.) zu kaufen. Es besteht keine Verpflichtung, sondern nur ein Wahlrecht. Wird eine Kaufoption nicht ausgeübt, verfällt sie wertlos.

**Delta** Delta drückt die absolute Veränderung des theoretischen Werts einer Option aus, die sich in Abhängigkeit einer Kursveränderung des Basiswerts um eine Einheit ergibt. Mathematisch betrachtet stellt Delta die erste Ableitung des Optionspreises nach dem Kurs des Basiswerts dar.

**Delta-Hedging** Absicherung einer Optionsposition durch die zugrundeliegenden Basiswerte (z.B. Aktien). Die Anzahl der zum Hedging benötigten Basiswerten wird ständig durch das dynamische Delta der Optionen angeglichen, was eine ständige Beobachtung der Gesamtposition erfordert.

**Derivate (derivative Instrumente)** Bei derivaten Finanzinstrumenten handelt es sich um keine eigenständigen Anlageinstrumente, sondern um Rechte, deren Bewertung vornehmlich aus dem Preis und den Preisschwankungen und -erwartungen eines zugrundeliegenden Basisinstruments, zum Beispiel Aktien und Anleihen, abgeleitet ist. Zu den Derivaten zählen alle Arten von Optionen und Futures.

**Drift** Drift bedeutet eine erwartete Wachstumsrate des Aktienkurses.

**Europäische Option** Bei einer europäischen Option kann der Inhaber der Option (Optionskäufer) das Optionsrecht nur am Ende der Laufzeit ausüben.

**Handelsstrategie** Eine Gesamtposition eines Händlers in verschiedenen Wertpapieren in Abhängigkeit von der Zeit.

**Hedging (Hedge)** Absicherung von Preisrisiken. Durch die Übernahme eines zweiten, kompensatorischen Risikos wird ein vorhandenes Risiko ausgeglichen. Z. B. können bestehende Wertpapierpositionen durch den Kauf bzw. Verkauf von Derivaten (Futures, Optionen, u.a.) gegen negative Kursentwicklungen abgesichert werden.

**Leerverkauf** Verkauf von Wertpapieren, Waren, Devisen, Optionen und Futures-Kontrakten, die sich noch gar nicht im Besitz des Verkäufers befinden, zu meist mit der Absicht, sie später billiger erwerben zu können und an der Differenz zwischen Verkaufs- und Kaufpreis zu verdienen.

**Long-Position** Position, die durch den Kauf eines Kontraktes, Derivates oder Basiswertes entstanden ist.

**Marktliquidität (liquider Markt)** Ein liquider Markt ermöglicht einen schnellen und wirkungsvollen Ein- und Ausstieg zum gegenwärtigen Marktkurs. Die Möglichkeit, Positionen schnell einzugehen und aufzulösen, ergibt sich aus der großen Anzahl von Marktteilnehmern mit der Bereitschaft zu kaufen oder zu verkaufen ohne zu übermäßigen Kursänderungen zu führen.

**Option** Ein Kontrakt, der dem Käufer (Inhaber) das Recht und dem Verkäufer (Stillhalter) die Verpflichtung gibt, bis zur Ausübung der Option zum Basispreis den Basiswert zu kaufen oder zu verkaufen.

**Payoff-Funktion** Eine reell-wertige Funktion, die der Auszahlung für einen Inhaber eines Derivats bei der Ausübung dieses Derivats entspricht.

**Put-Call-Parität** Austauschverhältnis zwischen einer Call- und einer Put-Option

$$C(S, t) + Ke^{-r(T-t)} = P(S, t) + S,$$

wobei  $C$  und  $P$  den Preisen einer Call- bzw. Put-Option entsprechen. Die Parameter sind für beide Optionen identisch: ein Ausübungstag  $T$ , ein Basispreis  $K$ , eine zugrundeliegende Aktie  $S$ .

**Put-Option (Verkaufsoption)** Ein Vertrag, durch den der Käufer der Put-Option das Recht erwirbt, einen bestimmten Bezugswert (z. B. eine Aktie, eine Unze Feingold, o. ä.) innerhalb eines festgelegten Zeitraums zum vereinbarten Preis (Basispreis) zu verkaufen.

**Short-Position** Im allgemeinen ist eine Short-Position eine solche Position, die durch einen Leerverkauf entstanden ist. Eine Short-Position in einer Option entsteht durch den Verkauf einer Option. Der Verkäufer einer Option wird auch Stillhalter genannt.

**Transaktionskosten** Gebühren, die der Anleger bei Kauf und Verkauf von Fondsanteilen an die depotführende Bank abführt. Daneben zahlen Anleger - allerdings unsichtbar - die Transaktionskosten, die der Fondsmanager bei Kauf oder Verkauf von Wertpapieren verursacht.

**Volatilität** Die Volatilität kennzeichnet das Risiko einer Aktie. Sie ist ein Maß für die Schwankungen eines Kursverlaufs, da sie angibt, in welcher Bandbreite um einen gewissen Trend sich der tatsächliche Kurs in der Vergangenheit bewegt hat. Je höher die Volatilität, umso risikoreicher gilt eine Aktie.

**Zinssatz** Eine jährliche Vergütung für geliehenes Geld oder Kapital.

Für die weiteren Definitionen und Begriffe siehe sowie [13], [43] als auch die Online-Börsenlexika

[www.boerse-online.de/lexikon](http://www.boerse-online.de/lexikon),

[www.boersenlexikon.faz.net](http://www.boersenlexikon.faz.net),

[www.consors.de](http://www.consors.de).

# Anhang F

## Abkürzungen und Bezeichnungen

$x :=$	$x$ ist definiert als
$W_t, \overline{W}_t$	Standard-Wienersche Prozesse
$C_t, C(S, t)$	Preis einer Call-Option zum Zeitpunkt $t$
$V_t, V(S, t)$	Preis eines Derivats zum Zeitpunkt $t$
$\mu$	Drift einer Aktie, die als Konstante oder als Funktion von $S$ und $t$ definiert werden kann
$\sigma$	Volatilität einer Aktie, die als Konstante oder als Funktion von $S$ und $t$ definiert werden kann
$K$	Basispreis eines Derivats
$P_t$	Portfoliowert im Zeitpunkt $t$ ,
$\hat{\sigma}, \tilde{\sigma}$	Modifizierte Volatilität
$a$	Parameter einer Transformationsgruppe
$A$	Definitionsbereich des Parameters $a$ , $A \subset \mathbb{R}$
$g$	Element einer Transformationsgruppe
$G(A)$	Symmetrietransformationsgruppe (Symmetriegruppe)
$X$	Raum der unabhängigen Variablen
$x$	Element des Raumes $X$ , im Einzelfall ist es ein Paar $(S, t)$
$\tilde{x}$	Tilde über einer Variablen bedeutet eine neue Variable, die mittels einer Transformation $g(x; a) \in G(A)$ erhalten wurde

$U$	Raum den abhängigen Variablen
$M$	Basisraum, ein kartesisches Produkt $X \times U$
$U_{(m)}$	Raum der Ableitungen der Ordnung $m$ der abhängigen Variablen
$M^{(m)}$	Jet-Raum der Ordnung $m$
$u^{(m)}$	Element des Raumes $U \times U_{(1)} \times \dots \times U_{(m)}$
$(x, u^{(m)})$	Element des Raumes $M^{(m)}$
$\Delta$	Symbol der Differentialgleichung
$L_{\Delta}$	Lösungsmannigfaltigkeit der algebraischen Gleichung $\Delta(x, u^{(2)}) = 0$
$G_{\Delta}$	Symmetriegruppe der algebraischen Gleichung $\Delta(x, u^{(2)}) = 0$
$V, U_1, U_2$	Infinitesimale Erzeugende einer Transformationsgruppe, Generatoren
$pr^{(k)}V$	$k$ -te Erweiterung des Generators $V$
$\mathcal{A}_{\Delta}$	Lie-Algebra der algebraischen Gleichung $\Delta(x, u^{(2)}) = 0$
$u^*(S, t)$	explizite Lösung der nichtlinearen Modellgleichung (3.1)
$(S_i, t_j)$	ein Punkt des Gitters
$h$	Ortsschrittweite
$\tau$	Zeitschrittweite
$w_{ij}$	Approximationswerte zu einer expliziten Lösung einer Differentialgleichung
$N_S$	Zahl der Ortsgitterpunkte
$N_t$	Zahl der Zeitgitterpunkte
$\Omega$	Definitionsbereich der Variablen $(S, t)$
$\varepsilon_{ij}$	gesamter Diskretisierungsfehler
$\varepsilon_j$	gesamter Ortsdiskretisierungsfehler auf dem Zeitschritt $j$

# Literaturverzeichnis

- [1] William F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press Inc., third edition, 1993.
- [2] Vladimir I. Arnol'd. *Geometrische Methoden in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, 1987.
- [3] Peter Bank and Dietmar Baum. Hedging and portfolio optimization in financial markets with a large trader. *Mathematical Finance*, 14:1–18, 2004.
- [4] Guy Barles and Halil M. Soner. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance and Stochastic*, 2(4):369–397, 1998.
- [5] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–659, May-June 1973.
- [6] George W. Bluman and Sukeyuki Kumei. *Symmetries and Differential Equations*, volume 81 of *Applied mathematical sciences*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 1989.
- [7] Ljudmila A. Bordag and Alina Y. Chmakova. Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives. Preprint 02/04, Fakultät Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik, Brandenburgische Technische Universität Cottbus, Germany, 2004.
- [8] Ilja Bouchouev and Victor Isakov. The inverse problem of option pricing. *Inverse Problems*, 13:11–17, 1997.
- [9] Ilja Bouchouev and Victor Isakov. Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets. *Inverse Problems*, 15:95–116, 1999.
- [10] Phelim P. Boyle and Ton Vorst. Option replication in discrete time with transaction costs. *Journal of Finance*, 47:271–293, 1992.

- [11] Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz. Portfolio insurance and financial market equilibrium. *Journal of Business*, 62(4):455–472, 1989.
- [12] Mark Broadie and Jérôme Detemple. Recent advances in numerical methods for pricing derivative securities. Working paper, CIRANO, 1996.
- [13] Hans E. Büschgen. *Das kleine Börsenlexikon*. Verlagsgruppe Handelsblatt, Düsseldorf, 22. edition, 2001.
- [14] Claudio Canuto, M. Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, and Thomas A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 1988.
- [15] Philippe G. Ciarlet and Jacques Louis Lions. *Handbook of numerical analysis*. Distributors for the United States and Canada, Elsevier Science Pub. Co., New York, 1990.
- [16] John C. Cox and Stephen A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3:145–166, 1976.
- [17] John C. Cox, Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263, 1979.
- [18] Emanuel Derman and Iraj Kani. Riding on the smile. *Risk*, 7:32–39, 1994.
- [19] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7:18–20, 1994.
- [20] Bertram Düring, Michel Fournié, and Ansgar Jüngel. High order compact finite difference schemes for a nonlinear Black-Scholes equation. Research paper, Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, Deutschland, 2001.
- [21] Peter A. Forsyth and Kenneth R. Vetzal. Implicit solution of uncertain volatility/transaction cost option pricing models with discretely observed barriers. *Applied Numerical Mathematics*, 36:427–445, 2001.
- [22] George E. Forsythe and Wolfgang R. Wasow. *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, New York, 1960.
- [23] Jürgen Franke, Wolfgang Härdle, and Christian Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 2001.
- [24] Rüdiger Frey. Derivative asset analysis in models with level-dependent and stochastic volatility. *CWI Quarterly, Amsterdam*, 10(1):1–34, 1997.



- [25] Rüdiger Frey. Perfect option replication for a large trader. *Finance and Stochastics*, 2:115–148, 1998.
- [26] Rüdiger Frey. Market illiquidities as a source of model risk in dynamic hedging. In Rajna Gibson, editor, *Model Risk*. Risk Publications, London, 2000.
- [27] Rüdiger Frey and Pierre Patie. Risk management for derivatives in illiquid markets: A simulation study. In K Sandmann and Ph. Schönbucher, editors, *Advances in Finance and Stochastics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [28] Rüdiger Frey and Alexander Stremme. Market volatility and feedback effect from dynamic hedging. *Mathematical Finance*, 7(4):351–374, 1997.
- [29] Guiseppe Gaeta. *Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations*, volume 299 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL / Boston, USA / London UK, 1994.
- [30] Rafail K. Gazizov and Nail H. Ibragimov. Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 17:387–407, 1998.
- [31] Wolfgang Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, first edition, 1986.
- [32] Michael Harrison and Stanley R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 11:215–260, 1981.
- [33] Steven L. Heston. A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(4):327–343, 1993.
- [34] David G. Hobson. Stochastic volatility. In D. Hand and S. Jacka, editors, *Statistics in Finance*. Applications of Statistics Series, Arnold, London, 1998.
- [35] David S. Hodges and A Neuberger. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review Future Market*, 8:222–239, 1989.
- [36] T. Hoggard, A.E. Whalley, and P. Wilmott. Hedging option portfolios in the presence of transaction costs. *Advances in Futures and Options Research*, 7:21–35, 1994.
- [37] John C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives*. Prentice-Hall International, Inc., London, fourth edition, 2000.
- [38] John C. Hull and Alan White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2):281–300, June 1987.

- [39] John C. Hull and Alan White. An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility. *Advances in futures and options research*, 3:29–61, 1988.
- [40] John C. Hull and Alan White. Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(1):87–99, March 1990.
- [41] Peter E. Hydon. *Symmetry methods for differential equations : a beginner's guide*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, New York, 2000.
- [42] Nail H. Ibragimov. *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*. John Wiley&Sons, Chischester, USA / New York, USA / Weinheim, Germany / Brisbane, USA / Singapore, Singapore / Toronto Canada / etc., 1999.
- [43] Albrecht Irle. *Finanzmathematik, die Bewertung von Derivaten*. B. G. Teubner, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden, second edition, 2003.
- [44] Kiyosi Itô and Henry P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., second edition, 1974.
- [45] Robert A. Jarrow. Market manipulation, bubbles, corners, and short squeezes. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27:311–337, September 1992.
- [46] Robert A. Jarrow. Derivative security markets, market manipulation, and option pricing theory. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29:241–261, June 1994.
- [47] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 1999.
- [48] Granino A. Korn and Theresa M. Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Dover Publications, 2000.
- [49] Ralf Korn and Elke Korn. *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*. Gabler Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1999.
- [50] Vladimir I. Krylov, Vladimir V. Bobkov, and Petr I. Monastyrnyi. *Computational methods*, volume 1. Nauka, Moscow, Russia, 1975.

- [51] Vladimir I. Krylov, Vladimir V. Bobkov, and Petr I. Monastyryni. *Computational methods*, volume 2. Nauka, Moscow, Russia, 1975.
- [52] Hayne E. Leland. Option pricing and replication with transaction costs. *Journal of Finance*, 40:1283–1301, 1985.
- [53] Sophus Lie and Dr. Georg Scheffers (ED). *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*. B. G. Teubner, Leipzig, 1891.
- [54] Hong Liu and Jiongmin Yong. Option pricing with an illiquid underlying asset market. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2004. Forthcoming.
- [55] Guri I. Marchuk and Vladimir V. Shaidurov. *Difference methods and their extrapolation*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 1983.
- [56] Robert Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141–183, 1973.
- [57] Robert Merton. *Continuous Time Finance*. Basil Blackwell, Oxford, 1990.
- [58] Thomas Mikosch. *Elementary stochastic calculus with Finance in View*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000.
- [59] Peter J. Olver. *Application of Lie groups to differential equations*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 1986.
- [60] Lev V. Ovsiannikov. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press Inc., New York, USA, 1982.
- [61] George C. Papanicolaou and Ronnie K. Sircar. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 5:45–82, 1998.
- [62] Antonio Parás and Marco Avellaneda. Dynamic hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs. *Applied Mathematical Finance*, 1:165–193, 1994.
- [63] Eckhard Platen and Martin Schweizer. On feedback effects from hedging derivatives. *Mathematical Finance*, 8:67–84, 1998.
- [64] Ulrike Polte. Pricing and hedging of derivative securities with random market liquidity. In *Workshop on Nonlinear PDEs and Financial Mathematics*. University of Leipzig, November 2004.

- [65] Alain Rigal. High order difference schemes for unsteady one-dimensional diffusion-convection problems. *Journal of computational Physics*, 114:59–76, 1994.
- [66] Leonard C. G. Rogers and Denis Talay. *Numerical methods in finance*. Cambridge University Press, 1999.
- [67] Stephen A. Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3):341–360, 1976.
- [68] Mark Rubinstein. Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49(3):771–818, 1994.
- [69] Alexander A. Samarskij. *Theorie der Differenzenverfahren*. Geest & Portig, Leipzig, first edition, 1984.
- [70] Alexander A. Samarskij and Evgenij S. Nikolaev. *Numerical methods for grid equations*, volume 1 and 2. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1989.
- [71] Philipp J. Schönbucher and Paul Wilmott. The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 61(1):232–272, 2000.
- [72] Rüdiger Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., second edition, 2003.
- [73] Manfred Steiner and Christoph Bruns. *Wertpapiermanagement*. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, sixth edition, 1998.
- [74] Hans Stephani. *Differentialgleichungen: Symmetrien und Lösungsmethoden*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Germany / Berlin, Germany / Oxford, UK, 1994.
- [75] Mark Y. Vygodsky. *Mathematical Handbook*. MIR Publishers, Moscow, fifth edition, 1987.
- [76] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, USA / Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 1983.
- [77] Stephen Wolfram. MATHEMATICA. *Ein System für Mathematik auf dem Computer*. Addison-Wesley, second edition, 1992.